Logic: another thing that penguins aren't very good at.

ulm university universität
uulm

Semantic Web Grundlagen

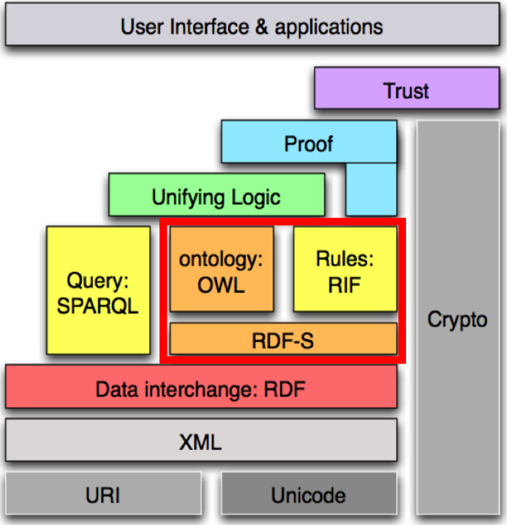
Logik – Grundlagen

Birte Glimm
Institut für Künstliche Intelligenz | 31. Okt 2011

Organisatorisches: Inhalt

Einleitung und XML	17. Okt	SPARQL Syntax	12. Dez
Einführung in RDF	20. Okt	Übung 4	15. Dez
RDF Schema	24. Okt	SPARQL Semantik	19. Dez
fällt aus	27. Okt	SPARQL 1.1	22. Dez
Logik – Grundlagen	31. Okt	Übung 5	9. Jan
Übung 1	3. Nov	SPARQL Entailment	12. Jan
Semantik von RDF(S)	7. Nov	SPARQL Implemetierung	16. Jan
RDF(S) & Datalog Regeln	10. Nov	Abfragen & RIF	19. Jan
OWL Syntax & Intuition	14. Nov	Übung 6	23. Jan
Übung 2	17. Nov	Ontology Editing	26. Jan
OWL & BLs	21. Nov	Ontology Engineering	30. Jan
OWL 2	24. Nov	Linked Data	2. Feb
Tableau	28. Nov	Übung 7	6. Feb
Übung 3	1. Dez	SemWeb Anwendungen	9. Feb
Blocking & Unravelling	5. Dez	Wiederholung	13. Feb
Hypertableau	8. Dez	Übung 8	16. Feb

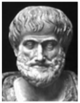
Logik – Grundlagen



Was ist Logik?

Etymologische Herkunft: griechisch $\lambda o \gamma o \varsigma$
bedeutet “Wort, Rede, Lehre” (s.a. Faust I . . .)

- Logik als Argumentation



Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.

$\rightarrow$ Also ist Sokrates sterblich.

Warum?

Alle Pinguine sind schwarz-weiß.
Einige alte TV-Shows sind schwarz-weiß.

$\rightarrow$ Einige Pinguine sind alte TV-Shows.

- Definition für diese Vorlesung:
  Logik ist die Lehre vom formal korrekten Schließen.

Warum formal?

Automatisierbarkeit! Eine
“Rechenmaschine” für Logik!!
G. W. Leibniz (1646-1716):

> *“alle menschlichen Schlußfolgerungen müssten auf irgendeine mit Zeichen arbeitende Rechnungsart zurückgeführt werden, wie es sie in der Algebra und Kombinatorik und mit den Zahlen gibt, wodurch nicht nur mit einer unzweifelhaften Kunst die menschliche Erfindungsgabe gefördert werden könnte, sondern auch viele Streitigkeiten beendet werden könnten, das Sichere vom Unsicheren unterscheiden und selbst die Grade der Wahrscheinlichkeiten abgeschätzt werden könnten, da ja der eine der Disput Streitenden zum anderen sagen könnte: Calculemus (Lasst uns doch nachrechnen)”*

Grundbegriffe der Logik

Interpretation
Modell
Erfüllbarkeit
Folgerung
Ableitungsregel
Term
Satz
Proposition
Formel
Domäne
Atom
Entscheidbarkeit
Deduktionskalkül
Individuum
Semantik
Syntax
Diskursuniversum
Tautologie
Modelltheorie
Widerspruch

Wie funktioniert Logik?

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.

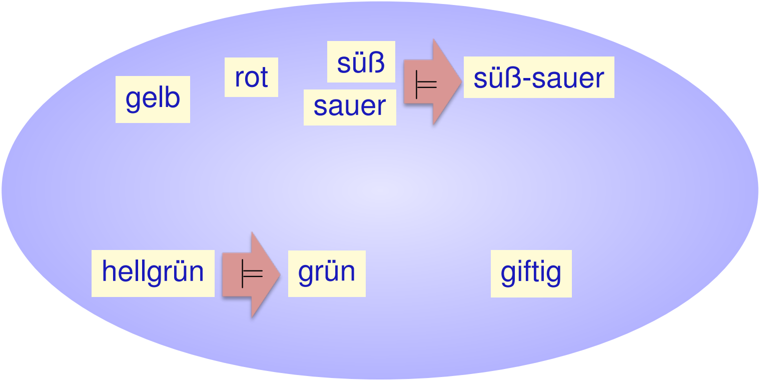
Also ist Sokrates sterblich.

Logik ist die Lehre vom formal korrekten Schließen.

- Was schließen wir woraus?
- Beschreibende Grundelemente der Logik nennen wir Sätze.

Wie funktioniert Logik? Sätze und Schlussfolgerungen

Jede Logik besteht aus einer Menge von Sätzen zusammen mit einer Schlussfolgerungsrelation (entailment relation). Letztere liefert die Semantik (grch. $\sigma\eta\mu\alpha\upsilon\tau\iota\kappa o\varsigma$ – zum Zeichen gehörend).



Folgerung und Äquivalenz von Sätzen

Formal: $L := (S, \models)$ mit $\models : 2^S \to S$

Dabei bedeutet für

- eine Menge $\varphi \subseteq S$ von Sätzen und
- einen Satz $\varphi \in S$

$$\varphi \models \varphi$$

"Aus den Sätzen φ folgt der Satz φ" oder auch
"φ ist eine logische Konsequenz aus φ."

Gilt für zwei Sätze φ und ψ, dass sowohl $\{\varphi\} \models \psi$ als auch $\{\psi\} \models \varphi$, dann sind diese Sätze (logisch) äquivalent und man schreibt auch $\psi \equiv \varphi$.

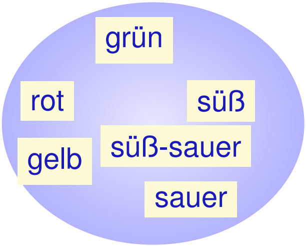
Wie funktioniert Logik? Syntax

Syntax (von grch. $\sigma\upsilon\nu\tau\alpha\xi\iota\varsigma$ – Zusammenstellung, Satzbau) erschließt sich über die Frage

Was ist ein “richtiger” Satz? D.h. wie wird die Menge der Sätze einer Logik definiert?

Nutzung von “Erzeugungsregeln” zur Definition (Konstruktion) von wohlgeformten Sätzen, z.B.:

Grundelemente:



Syntax-Regel: “Wenn φ und ψ Sätze sind, dann auch $\varphi \wedge \psi$”

Konstruktor oder Junktor

süß-sauer

Wie funktioniert Logik? Ausdrucksstärke.

Trade-off: Logiken mit vielen Ausdrucksmitteln (Konstruktoren/Junktoren) sind:

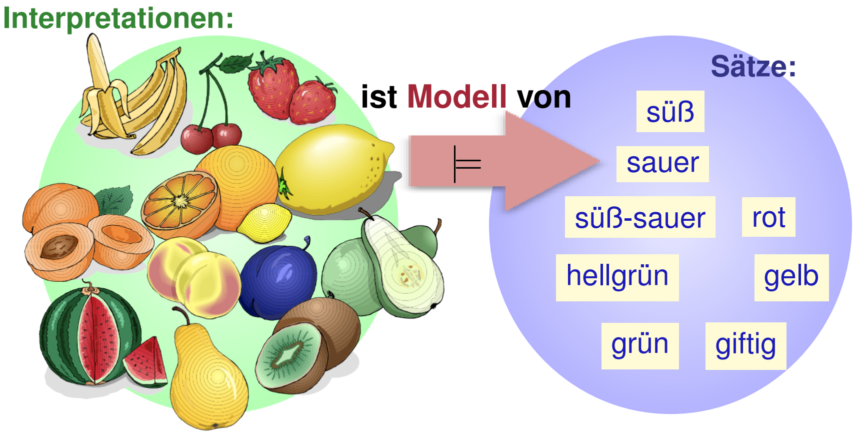
- Komfortabler in der Verwendung (verschiedene und komplexe Sachverhalte sind einfach auszudrücken), aber
- Schwieriger (meta)mathematisch zu handhaben (Beweisen von Eigenschaften der Logik umständlicher).

Möglicher Ausweg: Einschränkung der Sätze auf Teilmenge, die für jeden Satz der Logik einen logisch äquivalenten Vertreter enthält (vgl. Normalformen, minimale Junktorenmengen. . .) und Definition der anderen Sätze/Junktoren als “syntactic sugar”.

Wird eine Logik über dieses Maß hinaus eingeschränkt, erhält man ein Fragment der ursprünglichen Logik mit geringerer Ausdrucksstärke.

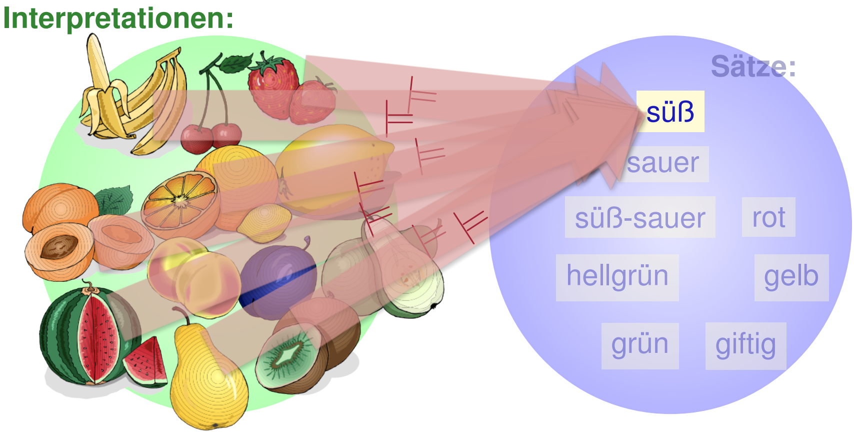
Wie funktioniert Logik? – Modelltheorie

Eine Möglichkeit, die *Schlussfolgerungsrelation* zu definieren besteht über Interpretationen bzw. Modelle.



Wie funktioniert Logik? – Modelltheorie

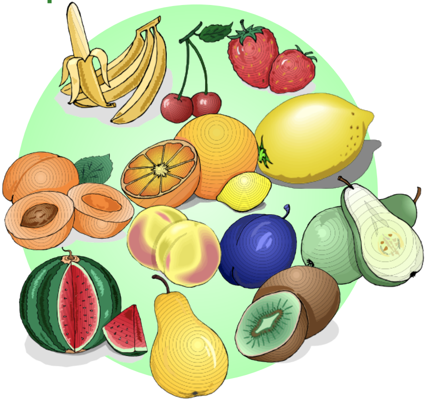
Sätze, für die jede Interpretation ein Modell ist, heißen *allgemeingültig* oder *Tautologien* (grch. $\tau\alpha\upsilon\tau o\lambda o\gamma\iota\alpha$).



Wie funktioniert Logik? – Modelltheorie

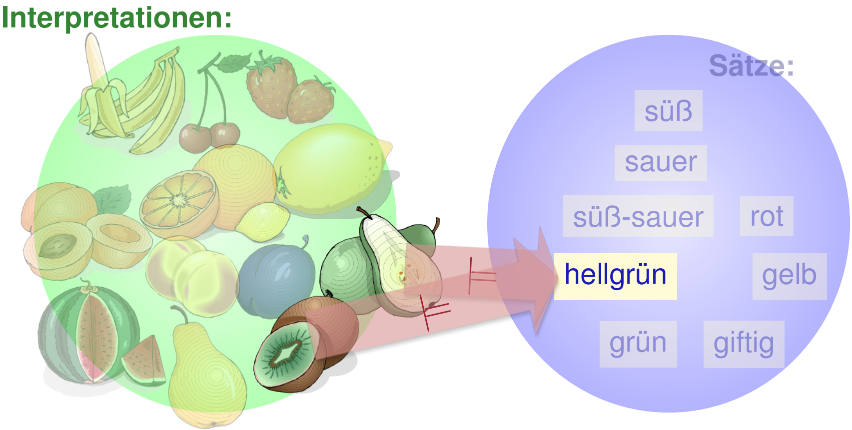
Sätze, für die keine Interpretation ein Modell ist, heißen *widersprüchlich* oder *unerfüllbar*.

Interpretationen:



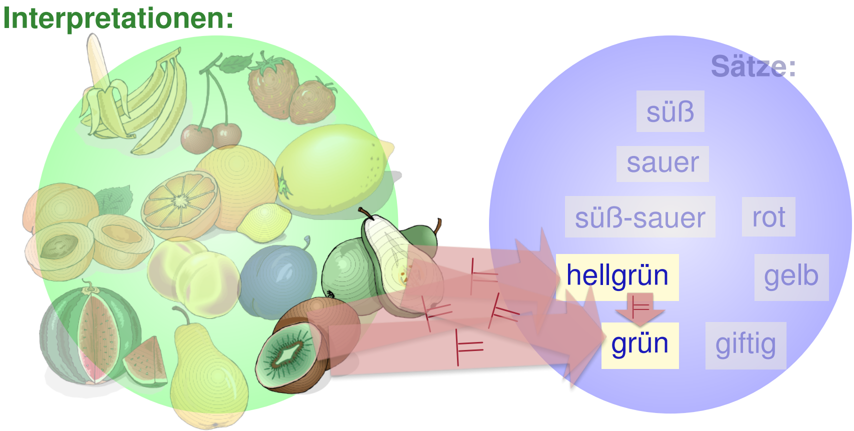
Wie funktioniert Logik? – Modelltheorie

Sätze, die (mindestens) ein Modell haben, heißen *erfüllbar*.



Wie funktioniert Logik? – Modelltheorie

Eine Möglichkeit, die Schlussfolgerungsrelation zu definieren besteht über Interpretationen bzw. Modelle.

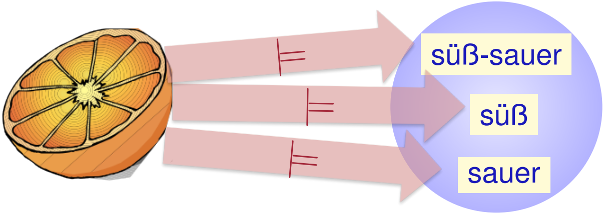


Wie funktioniert Logik?
Semantik entlang der Syntax

Häufiges Prinzip bei Definition von Interpretationen:

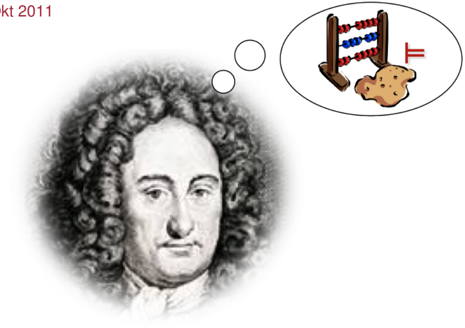
- Interpretation von Grundelementen wird festgelegt
- Interpretation von zusammengesetzten (konstruierten) Sätzen wird auf die Interpretation der Teile zurückgeführt:

Semantik-Regel: “Die Modelle von $\varphi \wedge \psi$ sind genau die Interpretationen, die Modelle von φ und ψ sind.”



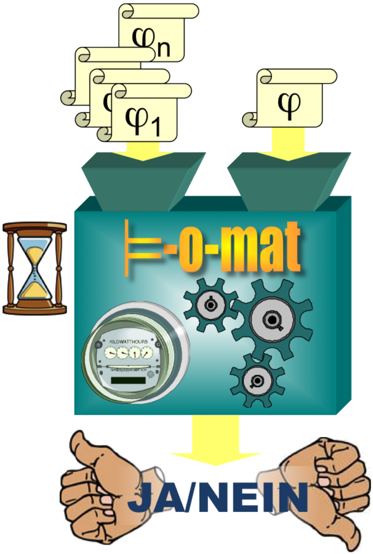
Beweistheorie

Zurück zu Leibniz:
Rechenmaschine für Logik



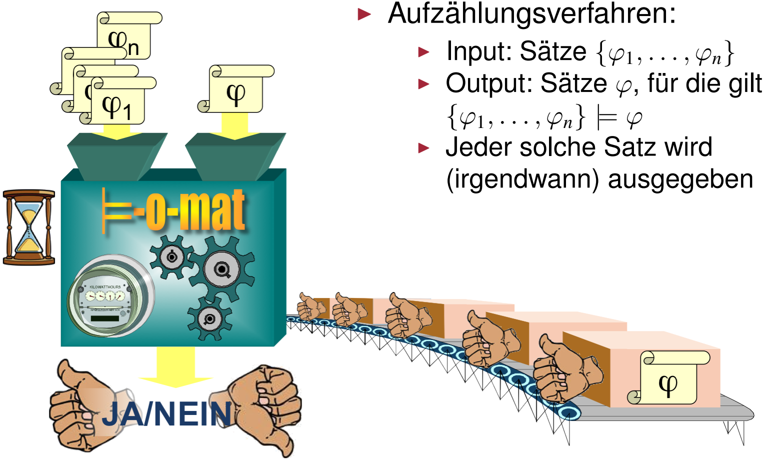
- Aber: Möglichkeit, direkt mit allen möglichen Interpretationen zu arbeiten, oft eingeschränkt
- Daher: Versuch, Schlussfolgerungsrelation durch rein syntaktische Verfahren zu beschreiben/berechnen

Entscheidungsverfahren/Entscheidbarkeit



- Entscheidungsalgorithmus:
  - Input: Menge $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ von Sätzen und Satz φ
  - Terminiert nach endlicher Zeit
  - Output:
    - "Ja", falls $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$
    - "Nein" andernfalls
- Gibt es einen solchen Algorithmus für eine Logik, dann nennt man sie entscheidbar

Aufzählungsverfahren/Semi-Entscheidbarkeit



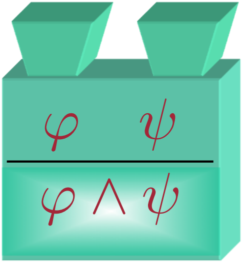
- Aufzählungsverfahren:
  - Input: Sätze $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$
  - Output: Sätze φ, für die gilt $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$
  - Jeder solche Satz wird (irgendwann) ausgegeben

Gibt es einen solchen Algorithmus für eine Logik, dann nennt man sie semi-entscheidbar

Deduktionskalkül

- Kann gesehen werden als spezielle Form eines Aufzählungsverfahrens
- besteht aus Ableitungsregeln, z.B.:

$$\{\varphi, \psi, \omega, \varphi \land \psi, \ldots\}$$



Deduktionskalkül

Ein Satz φ ist aus einer Menge Φ von Sätzen ableitbar (geschrieben: $\Phi \vdash \varphi$), wenn sich φ durch wiederholtes Anwenden der Ableitungsregeln eines Deduktionskalküls aus Φ “erzeugen” lässt.

Deduktionskalkül

Deduktionskalkül ist korrekt (engl. sound), wenn aus $\Phi \vdash \varphi$ immer $\Phi \models \varphi$ folgt, d.h. alle ableitbaren Schlüsse auch wirklich logisch folgen.

Deduktionskalkül ist vollständig (engl. complete), wenn aus $\Phi \models \varphi$ immer $\Phi \vdash \varphi$ folgt, d.h. alle logischen Konsequenzen auch abgeleitet werden können.

In einem korrekten und vollständigen Deduktionskalkül gilt:

$$\models \quad = \quad \vdash$$

$\rightsquigarrow$ Man kann es als Aufzählungsverfahren verwenden.

Achtung! Es gibt Logiken, für die nachweislich kein solches Deduktionskalkül existiert (Gödel 1931).

Weitere interessante Eigenschaften von Logiken

- Monotonie
- Kompaktheit
- Algorithmische Komplexität für Entscheidungsverfahren
- ... und jede Menge anderes ...

Aussagenlogik

- Auch: *propositionale* Logik
  Boolesche Logik
- Schon bei den Stoikern voll ausgearbeitete Junktorenlogik
- George Boole (1815 – 1864)
  "An Investigation of the Laws of Thought" (1854)

  - Syntaktische Grundelemente:
    atomare Sätze / Propositionen / Aussagen
    $(p, q, \ldots, p_1, p_2, \ldots)$
  - Können als natürlichsprachliche Aussagen gedacht werden: "Es regnet." ...

Aussagenlogik – Syntax

- Erzeugungsregeln für Sätze:
  - Alle atomaren Propositionen sind Sätze $(p, q, \dots)$
  - Ist α ein Satz, dann auch $\neg\alpha$
  - Sind α und ψ Sätze, dann auch $(\alpha \wedge \psi), (\alpha \vee \psi), (\alpha \rightarrow \psi)$ und $(\alpha \leftrightarrow \psi)$
- Klammern können ggf. weggelassen werden; Präzedenzen (bei uns): $\neg$ vor $\wedge, \vee$ vor $\rightarrow, \leftrightarrow$.
- Zusätzliche Klammern machen es trotzem oft lesbarer ...

Aussagenlogik – Syntax

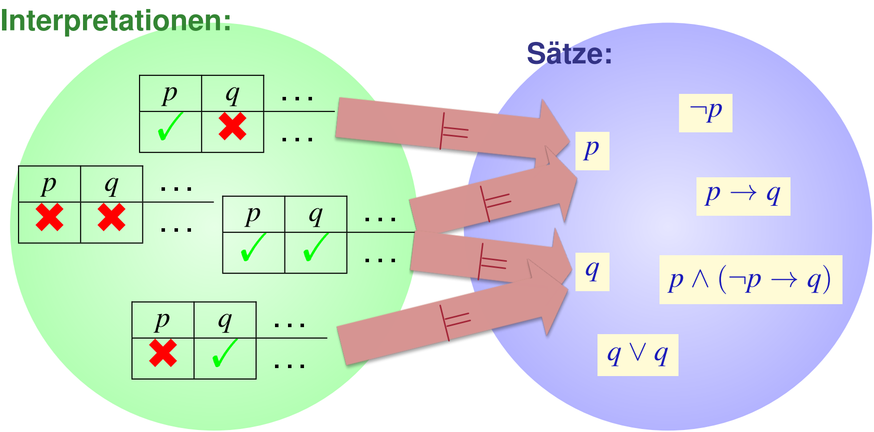
Junktor	Name	Intuitive Bedeutung
$\neg$	Negation	“nicht”
$\wedge$	Konjunktion	“und”
$\vee$	Disjunktion	“oder”
$\rightarrow$	Implikation	“wenn – dann”
$\leftrightarrow$	äquivalenz	“genau dann, wenn”

Einfache Aussagen	Modellierung
Es regnet.	r
Die Straße wird nass.	n
Die Sonne ist grün	g

Zusammengesetzte Aussagen	Modellierung
Wenn es regnet, dann wird die Straße nass.	$r \rightarrow n$
Wenn es regnet, und die Straße nicht nass wird, dann ist die Sonne grün.	$(r \wedge \neg n) \rightarrow g$

Aussagenlogik – Modelltheoretische Semantik

Was sind die Modelle der Aussagenlogik?

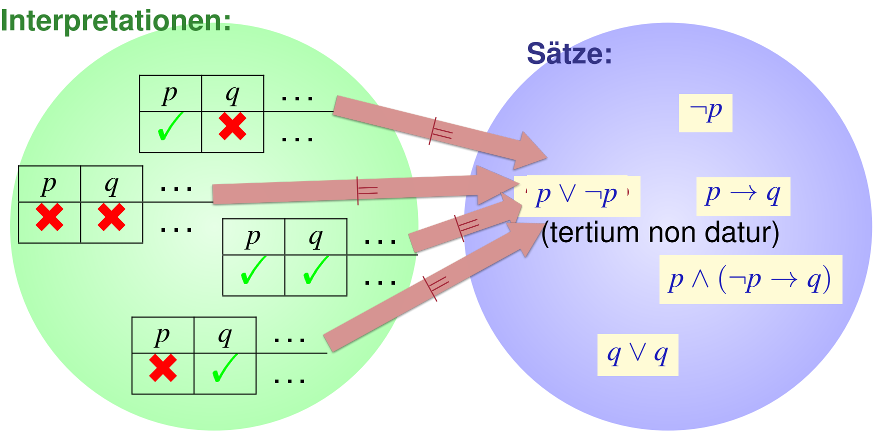


Aussagenlogik – Modelltheoretische Semantik

- Formal: Interpretationen $\mathcal{I}$ sind Abbildungen von der Menge der atomaren Propositionen in die Menge $\{\texttt{wahr}, \texttt{falsch}\}$, d.h. jeder dieser Propositionen p wird ein Wahrheitswert $\mathrm{WW}_{\mathcal{I}}(p)$ zugeordnet.
- Daraus bestimmt man Modelle für zusammengesetzte Sätze über Semantik-Regeln
  - $\mathcal{I}$ Modell von $\neg\varphi$ genau dann, wenn $\mathcal{I}$ kein Modell von φ
  - $\mathcal{I}$ Modell von $(\varphi \land \psi)$ genau dann, wenn $\mathcal{I}$ Modell von φ und von ψ
  - $\mathcal{I}$ Modell von $(\varphi \lor \psi)$ genau dann, wenn $\mathcal{I}$ Modell von φ oder von ψ
  - $\mathcal{I}$ Modell von $(\varphi \rightarrow \psi)$ genau dann, wenn $\mathcal{I}$ kein Modell von φ oder $\mathcal{I}$ Modell von ψ
  - $\mathcal{I}$ Modell von $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ genau dann, wenn $\mathcal{I}$ Modell für jeden oder keinen der beiden Sätze ist.

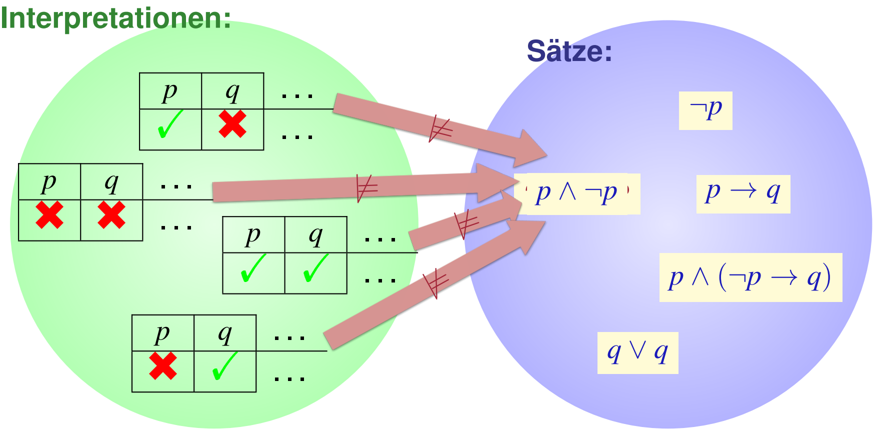
Aussagenlogik – Modelltheoretische Semantik

Beispiel für Tautologie in der Aussagenlogik.



Aussagenlogik – Modelltheoretische Semantik

Beispiel für Kontradiktion in der Aussagenlogik.



Aussagenlogik – Einige logische Äquivalenzen

$$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi \qquad \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi \qquad \varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \omega) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \omega \qquad \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$$

$$\varphi \vee (\psi \vee \omega) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \omega \qquad \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

$$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi \qquad \neg\neg\varphi \equiv \varphi$$

$$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \equiv \varphi \qquad \varphi \vee (\psi \wedge \omega) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \omega)$$

$$\varphi \vee (\psi \wedge \varphi) \equiv \varphi \qquad \varphi \wedge (\psi \vee \omega) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \omega)$$

Aussagenlogik – Normalformen & vollständige Junktoren

Aus diesen Äquivalenenzen folgt:

- Zu jeder Formel gibt es eine logisch äquivalente Formel, die nur die Junktoren $\wedge$ und $\neg$ enthält.
- Zu jeder Formel gibt es eine Formel in konjunktiver Normalform, d.h.
  - Nur einfache Negation direkt vor atomaren Propositionen (sog. Literale)
  - Formel ist Konjunktion von Disjunktionen von Literalen
  - Bsp.: $(p \vee \neg q \vee r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee q \vee s) \wedge (q \vee \neg r \vee s)$

Aussagenlogik – Entscheidungsalgorithmus

- Aussagenlogik ist entscheidbar
- Nützliche Eigenschaft dabei:
  $\{\alpha_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$ gilt genau dann, wenn
  $(\varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n) \rightarrow \varphi$ eine Tautologie ist
- Entscheidung, ob Satz Tautologie ist, über Wahrheitswerttabelle
- Im Prinzip: Überprüfung aller Interpretationen (nur die Wahrheitswerte der vorkommenden atomaren Propositionen fallen ins Gewicht)

Aussagenlogik – Entscheidungsalgorithmus

Modus Ponens:

$$\{p, p \rightarrow q\} \models q$$

$$\models (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

p	q	$\ldots$	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
✗	✗	$\ldots$	$\models$	$\not\models$	$\models$
✗	✓	$\ldots$	$\models$	$\not\models$	$\models$
✓	✗	$\ldots$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$
✓	✓	$\ldots$	$\models$	$\models$	$\models$