
Informationstheorie SS 2009
Prof. Günther Palm • Institut für Neuroinformatik
6. Aufgabenblatt (Abgabe: 10.06.2009)

17. Aufgabe: (3 Punkte)

Seien X, Y, Z Zufallsvariablen. Beweisen oder widerlegen Sie die Ungleichung

$$T((X, Y), Z) \leq T(X, Z) + T(Y, Z)$$

18. Aufgabe: (4 Zusatzpunkte)

Seien X, Y, Z Zufallsvariablen mit Werten in endlichen Mengen. Zeigen Sie:

$$2 \cdot I(X, Y, Z) \leq I(X, Y) + I(Y, Z) + I(X, Z)$$

19. Aufgabe: (4 Punkte)

Gegeben sei die Übergangswahrscheinlichkeit

$$P = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Mittels des durch die Matrix P beschriebenen Kanals werden Ergebnisse eines Würfelspiels (fairer Würfel) transportiert. Bestimmen Sie: $P(Y = 6|X \neq 6)$, $P(Y \neq 6|X = 6)$, $N(d_6)$ sowie $N(d_6|Y)$. Dabei ist

$$d_6(x, y) = \begin{cases} [X = 6], & \text{falls } x = 6 \\ [X \text{ beliebig}], & \text{falls } x \neq 6 \end{cases}$$

20. Aufgabe: (6 Punkte)

Auf einer Inselgruppe wurde ein alter Telegraph zur Übermittlung von Würfelzahlen gefunden, die Inselbewohner hatten so über die Inselgruppen hinweg Würfelspiele gespielt. Das Gerät funktioniert noch, allerdings nicht mehr ganz so, wie es sollte. Durch Versuche zeigt sich folgendes Übertragungsverhalten:

- $1 \mapsto 6$
- $2 \mapsto 3$
- $3 \mapsto (3, 5)$
- $4 \mapsto (2, 4)$
- $5 \mapsto 2$
- $6 \mapsto (1, 5)$

Dabei findet die Übertragung in fehlerhaften Fällen jeweils gleichwahrscheinlich statt, d.h. wenn man versucht eine 3 zu senden, wird mit 50% Wahrscheinlichkeit eine 3 empfangen, mit 50% jedoch eine 5. Sei nun die zu sendende Zahl der Wert der Zufallsvariablen X (Ergebnis des Würfelspiels), die tatsächlich empfangene Größe bezeichnen wir mit Y . Geben Sie eine geeignete Ratestrategie an, damit man mit geringstmöglichem Fehler aus Y den wahren Wert von X ermitteln kann. Sei Z der geratene Wert (d.h. Z ist eine Funktion von Y). Berechnen Sie:

- die Fehlerwahrscheinlichkeit $P(X \neq Z)$.
- die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(X \neq Z | Z = k)$.
- die Transinformation $T(X, Z)$.

Wie muss man das Würfelspiel (hier die Menge der übertragenen Zeichen) einschränken, wenn man den Telegraphen zur fehlerfreien Übertragung benutzen möchte? Wie groß ist dann $T(X, Z)$?

21. Aufgabe: (3 Punkte)

Zeigen Sie: Für Zufallsvariablen X, Y gilt $I(X + Y) \leq I(X) + I(Y)$.
Wann gilt Gleichheit?