

Übungsblatt 2

10. Mai 2016

Abgabe bis Dienstag, 17. Mai 2016, 14:00 Uhr

Aufgabe 2.1: (2+3 Pkt.)

Sie haben in der Vorlesung die Ackermann-Funktion $a(x, y)$ kennengelernt.

- (a) Zeigen Sie mittels Induktion, dass $a(2, y) = 2y + 3$ gilt.
- (b) Zeigen Sie, dass $z = a(4, 2)$ bereits mehr als 19 000 Dezimalstellen hat.

Hinweis: Sie dürfen zur Lösung in der Vorlesung bereits bewiesene Gleichungen verwenden.

Aufgabe 2.2: (3 Pkt.)

Zeigen Sie durch die Angabe von LOOP-Programmen, dass die folgenden Funktionen LOOP-berechenbar sind.

- (a) $(n, m) \mapsto n^m$
- (b) `IF $x_1 = 0$ THEN A ELSE B END`
- (c) $(n, m) \mapsto n \text{ DIV } m, m > 0$

Hinweis: Sie können die bereits im Skript definierte Additions- und Multiplikationsfunktion nutzen. DIV ist die ganzzahlige Division, also $7 \text{ DIV } 3 = 2$.

Aufgabe 2.3: (3 Pkt.)

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von LOOP-berechenbaren Funktionen, so dass jedes f_k durch ein LOOP-Programm mit k LOOP-Schleifen berechnet werden kann, nicht aber durch ein Programm mit $k - 1$ LOOP-Schleifen.

Zeigen Sie: Die Funktion g mit $g(k, n) := f_k(n)$ ist nicht LOOP-berechenbar.

Aufgabe 2.4: (4+3 Pkt.)

Schreiben Sie für die folgenden Funktionen jeweils ein GOTO-Programm.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ eine Primzahl } \geq 2 \text{ ist} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b)

$$g(n, m) = (n\text{-te Primzahl}, m\text{-te Primzahl})$$

wobei 2 die 0-te Primzahl sein soll. Zu Beginn der Rechnung sollen die Werte n, m in den Variablen x_2, x_3 stehen und das Ergebnis soll nach Ende des Algorithmus in x_0, x_1 zu finden sein.

Hinweis: Die Verwendung einer GOTO-berechenbaren Funktion innerhalb eines GOTO-Programms ergibt wiederum ein zulässiges GOTO-Programm.

Aufgabe 2.5: (7 Pkt.)

Gegeben sei eine Turingmaschine $M = (\{z_0, z_e\}, \{a, b\}, \{a, b, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ mit

$$\delta(z_0, a) = (z_0, a, R)$$

$$\delta(z_0, b) = (z_0, b, N)$$

$$\delta(z_0, \square) = (z_e, \square, N).$$

Schreiben Sie für M ein GOTO-Programm, das dieselbe Berechnung durchführt. Wenden Sie die Reduktion aus dem Skript an, welche auch in der Vorlesung angedeutet wurde.