

## Übungsblatt 5

21. Juni 2016

Abgabe bis Dienstag, 28. Juni 2016, 14:00 Uhr

---

Dieses Blatt ist das letzte *bewertete* Blatt dieses Semesters. Am Dienstag, den 5.7., wird ein weiteres *unbewertetes* Übungsblatt 6 erscheinen, welches in den Tutorien am 11. und 12.7. besprochen wird.

---

### Aufgabe 5.1: (3 Pkt.)

Zeigen Sie: Die Menge der falschen arithmetischen Formeln

$$FA = \{F \mid F \text{ ist geschlossene arithmetische Formel mit } F \notin WA\}$$

ist nicht rekursiv aufzählbar.

### Aufgabe 5.2: (3 Pkt.)

Zeigen Sie, dass die Komplexitätsklasse P unter Vereinigung und Schnitt abgeschlossen ist.

### Aufgabe 5.3: (3 Pkt.)

Es sei  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  eine Sprache und M eine Turing-Maschine mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle Eingaben  $x \in L$  hält M nach höchstens  $|x|^2$  Schritten und gibt 1 aus.
- Für alle Eingaben  $x \notin L$  hält M nach  $2^{|x|}$  Schritten und gibt 0 aus.

Entscheiden Sie, ob  $L \in P$  und begründen Sie Ihre Antwort.

### Aufgabe 5.4: (3 + 2 Pkt.)

Die Sprache DNF-SAT ist über folgende Problemstellung definiert:

*Gegeben:* Eine Boolesche Formel F in disjunktiver Normalform.

*Gefragt:* Gibt es eine erfüllende Belegung der Variablen von F?

(a) Zeigen Sie, dass  $\text{DNF-SAT} \in P$ .

(b) Finden Sie die Beweislücke in der nachstehenden Argumentation.

Durch „Ausmultiplizieren“ lässt sich jede Boolesche Formel in disjunktive Normalform bringen. Deshalb ist  $\text{SAT} \leq_p \text{DNF-SAT}$ . In Verbindung mit dem Ergebnis aus (a) folgt  $P = NP$ .

### Aufgabe 5.5: (3 Pkt.)

Zeigen Sie, dass das folgende Problem in NP liegt.

*Gegeben:* Ein ungerichteter Graph und eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$ .

*Gesucht:* Hat der Graph einen einfachen Pfad (keine Knoten werden doppelt besucht) der Länge  $\geq k$ ?

*Hinweis:* Die Länge eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

**Aufgabe 5.6:** (8 Pkt.)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

- (a)  $NP \subset P$
- (b) Falls für zwei Sprachen  $A$  und  $B$  gilt:  $A \leq_p B$  und  $B \leq_p A$ , dann folgt daraus  $A = B$ .
- (c) Falls  $SAT \leq_p A$  gilt, dann ist  $A$  NP-vollständig.
- (d) Wenn  $SAT \leq A$ , dann ist  $A$  NP-hart.
- (e) Sei  $A$  eine Sprache und  $f$  eine in polynomialer Zeit berechenbare Funktion, so dass gilt:  
 $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in SAT$ . Dann folgt, dass  $A$  NP-hart ist.
- (f)  $\leq_p$  ist transitiv.
- (g) Seien  $L_1 \subset \Sigma^*$ ,  $L_2 \subset \Gamma^*$  beliebige Sprachen in  $P$ , mit  $w_{in} \in L_2$  und  $w_{out} \notin L_2$ . Daraus folgt  $L_1 \leq_p L_2$ .
- (h) Jede nichtdeterministische Berechnung kann durch eine deterministische Berechnung simuliert werden.