

## Aufgabenblatt 4

### Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass jeder planar Graph einen Knoten mit Grad kleiner als 6 besitzt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für einen planaren zusammenhängenden Graphen mit  $v$  Knoten,  $e$  Kanten und  $f$  Regionen die Formel  $v - e + f = 2$  (Euler Formel) gilt. Beweisen Sie dann die Ungleichung  $3f \leq 2e$ .

### Aufgabe 2

Eine unabhängige Menge (Independent Set) in einem Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Menge  $I \subset V$  mit der Eigenschaft  $\forall u, v \in I, (u, v) \notin E$ . Das parametrisierte *IS* problem ist definiert als:

$$IS = \{(G, k) \mid G \text{ hat eine unabhängige Menge mit mindestens } k \text{ Knoten}\}.$$

Geben Sie einen Suchbaumalgorithmus für IS auf planaren Graphen und zeigen Sie damit, dass dieses Problem in FPT liegt. (Hinweis, benutzen Sie Aufgabe 1).

### Aufgabe 3

Beim VLSI (very large scale integration) tritt folgendes Problem auf: Gegeben ein rechteckiges  $m \times n$  Feld, in welchem einige der  $m \cdot n$  Zellen fehlerhaft sein können, gesucht wird eine minimale Anzahl von Zeilen und Spalten, die alle fehlerhaften Zellen abdecken. Parametrisiert ist dies die Frage, ob für gegebene Parameterwerte  $k_1$  and  $k_2$  alle Fehler mit maximal  $k_1$  Zeilen und  $k_2$  Spalten abgedeckt werden können. Geben Sie einen Suchbaumalgorithmus mit Laufzeit  $f(k_1, k_2) \cdot (m + n)^c$  für das Problem an.

### Aufgabe 4

Ein Cluster-Graph ist ein Graph in dem jede Zusammenhangskomponente eine Clique ist. Das Cluster Vertex Deletion Problem (CVDP) ist wie folgt definiert: Gegeben einen Graphen  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k$ , gibt es eine Knotenmenge  $C \subseteq V$  mit  $|C| \leq k$  so, dass nach der Entfernung der Knoten in  $C$ , der Graph ein Cluster-Graph ist?

- a) Zeigen Sie, dass  $G$  genau ein Cluster-Graph ist, wenn er keine Pfade mit 3-Knoten als induzierten Teilgraph besitzt.
- b) Geben Sie einen Problemerkern der Größe  $O(k^3)$  für CVDP.