Binäre Relationen

Def: A, B zwei Mengen. Das **kartesische Produkt** von beiden ist

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Eine Menge $R \subseteq A \times B$ heißt (zweistellige) **Relation**.

Anstatt "$(a,b) \in R$" schreibt man oft auch "$a\,R\,b$".

Sind R, S zwei Relationen, so ist die **Komposition** von R und S definiert als

$$R \circ S = \{(a, c) \mid \exists b : \; a \, R \, b, \; b \, S \, c\}$$

Mit R^2 bezeichnen wir die Relation $R \circ R$.

Die Relation

$$R^T = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

heißt die zu R **transponierte Relation** (oder inverse) Relation.

Es gilt:

$$\begin{aligned} (R \circ S) \circ T &= R \circ (S \circ T) \\ (R \circ S)^T &= S^T \circ R^T \end{aligned}$$

Die wichtigsten Eigenschaften von Relationen:

reflexiv:	$x\,R\,x$
symmetrisch:	$x\,R\,y \;\Rightarrow\; y\,R\,x$
transitiv:	$x\,R\,y,\; y\,R\,z \;\Rightarrow\; x\,R\,z$
antisymmetrisch:	$x\,R\,y,\; y\,R\,x \;\Rightarrow\; x = y$
konnex:	$x\,R\,y \,\vee\, y\,R\,x$
irreflexiv:	$\neg(x\,R\,x)$

Äquivalenzrelationen

Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt **Äquivalenzrelation**.

Die Mengen $X_i = [x_i]_R$ heißen **Äquivalenzklassen**

$$[x_i]_R := \{x \mid x\,R\,x_i\} = \{x \mid x_i\,R\,x\}$$

Index(R) ist die Anzahl der durch R erzeugten Äquivalenzklassen.

Mit X/R bezeichnen wir das Mengensystem $\{[x]_R \mid x \in X\}$. Dieses wird als **Quotientenmenge** (oder auch **Faktormenge**) von X nach R bezeichnet.

Halbordnungen

Eine Relation heißt **Halbordnung**, falls sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Eine Halbordnung heißt **Totalordnung** (oder lineare Ordnung), falls sie zusätzlich noch konnex ist.

Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Dann heißt $x \in X$

kleinstes Element (bzw. größtes Element), falls für alle $y \in X$ gilt $x \leq y$ (bzw. $y \leq x$). (Dies heißt insbesondere, dass x mit allen Elementen von X vergleichbar sein muß).

minimales Element (bzw. maximales Element), falls es kein $y \in X$ gibt mit $y < x$, d.h. $y \leq x$ und $y \neq x$ (bzw. $x < y$).

Graphen

Ein *gerichteter* Graph G ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V die (endliche) Menge der Knoten (engl.: vertices) und $E \subseteq V \times V$ die Menge der Kanten (engl.: edges) ist.

Ein *ungerichteter* Graph ist ein Paar $G = (V, E)$. Hier ist wieder V die Menge der Knoten und $V \subseteq \binom{V}{2}$ die Menge der Kanten. Hierbei ist $\binom{V}{2}$ die Menge aller zweielementigen Teilmengen von V.

Bei ungerichteten Graphen sind üblicherweise *Schlingen* nicht zugelassen (also Kanten, die von x nach x führen).

Sind zwei Knoten mit einer (gerichteten oder ungerichteten) Kante verbunden, so heißen sie *Nachbarn*. Bei gerichteten Graphen kann man darüberhinaus unter den Nachbarn zwischen den *Vorgängern* und den *Nachfolgern* unterscheiden.

Der *Grad* eines Knotens $v \in V$, $d(v)$ ist die Anzahl seiner Nachbarn (also die Anzahl der Knoten, die mit v eine Kantenverbindung haben). Bei gerichteten Graphen kann man darüberhinaus zwischen dem *Eingangsgrad* (die Anzahl der in v hineinführenden Kanten, bezeichnet mit $d_{in}(v)$) und dem *Ausgangsgrad* (die Anzahl der aus v herausführenden Kanten, bezeichnet mit $d_{out}(v)$) unterscheiden.

Es gilt:

$$d(v) = d_{in}(v) + d_{out}(v), \quad \sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

Def: Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heißen **isomorph**, wenn sie sich höchstens in der Bezeichnung ihrer Knoten unterscheiden, ansonsten aber dieselbe Struktur haben. Das heißt, es muß eine bijektive Funktion $f : V_1 \longrightarrow V_2$ existieren mit der Eigenschaft:

$$(u, v) \in E_1 \;\Leftrightarrow\; (f(u), f(v)) \in E_2$$

Wege und Kreise in Graphen

Ein **Weg** (oder Pfad) in einem (gerichteten oder ungerichteten) Graphen $G = (V, E)$ ist eine Folge von Knoten $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ aus V, so dass $(v_{i-1}, v_i) \in E$

Ein Weg heißt **einfach**, falls in der Folge $(v_1, \ldots, v_k)$ kein Knoten mehrfach auftritt und $v_0 \notin \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$.

Ein einfacher Weg ist heißt **Zyklus** (oder Kreis), falls $v_0 = v_k$. (Für ungerichetete Graphen muss ferner $k \geq 3$ gelten).

Ein Graph heißt **azyklisch** (oder kreisfrei), falls es in ihm keinen Zyklus gibt.

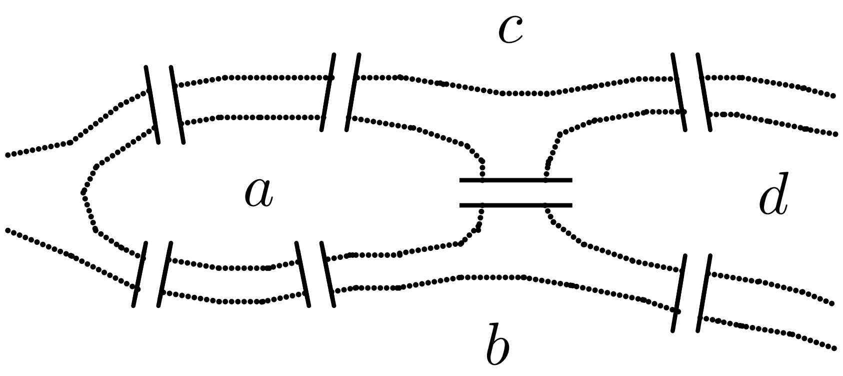
Satz: Die Knoten jedes gerichteten azyklischen Graphen lassen sich so durchnummerieren, dass für jede Kante $(u, v) \in E$ gilt: Nummer von u ¡ Nummer von v. (Topologische Sortierung).

Ein ungerichteter Graph heißt **zusammenhängend**, falls es von jedem Knoten einen Weg zu jedem anderen Knoten in dem Graphen gibt.

Ein **Baum** ist ein ungerichteter, zusammenhängender, azyklischer Graph.

Satz: Ein Baum mit n Knoten hat immer $n - 1$ Kanten.

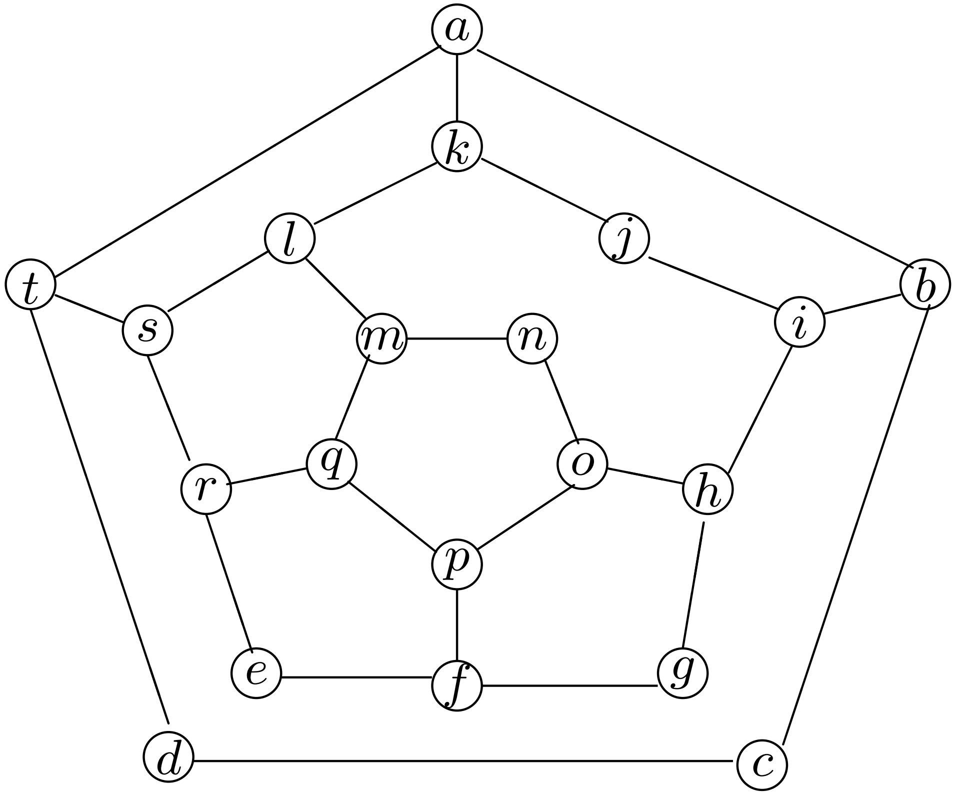
Euler- und Hamiltonkreise



Ein **Euler-Kreis** in einem Graphen, ist ein Kreis der jede *Kante* genau einmal besucht (Knoten dürfen mehr als einmal besucht werden).

Satz: (Euler, 1736) Ein zusammenhängender Graph (Mehrfachkanten zugelassen) besitzt einen Euler-Kreis genau dann, wenn der Grad jedes Knoten im Graphen gerade ist.

Ein **Hamilton-Kreis** in einem Graphen, ist ein Kreis auf dem jedem *Knoten* genau einmal vorkommt.



Satz: (Dirac, 1952) Wenn G ein zusammenhängender Graph mit $n \geq 3$ Knoten ist, in dem jeder Knoten mindestens $n/2$ viele Nachbarn hat, dann hat G einen Hamilton-Kreis.

Dieser Satz ergibt sich unmittelbar aus dem folgenden Satz.

Satz: (Ore, 1960) Wenn G ein zusammenhängender Graph mit $n \geq 3$ Knoten ist, in dem für zwei nicht-benachbarte Knoten u, v immer gilt $d(u) + d(v) \geq n$, dann hat G einen Hamilton-Kreis.

Adjazenzmatrizen

Die einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ zugeordnete Adjazenzmatrix M_G ist eine Boolesche $n \times n$ Matrix, definiert als $M_G(i, j) = 1$ falls $(i, j) \in E$ und 0 sonst.

$M_G^2 = M_G \cdot M_G$, (Boolesche Matrizenmultiplikation)

$M_G^k = M_G \cdot M_G^k$.

$M_G^k(i, j) = 1 \Leftrightarrow$ es gibt einen Pfad der Länge k von i nach j in G.

Satz: Ein gerichteter Graph G hat genau dann einen Kreis, wenn für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $M_G^{(k)} \neq \mathbf{0}$.

Eine effiziente Methode (Komplexität $O(n^3)$) zur Berechnung der Wege-Matrix (=transitive Hülle) stellt der *ıAlgorithmus von Warshall* dar:

```
FOR k:=1 TO n DO
   FOR i:=1 TO n DO
      IF M[i,k] THEN
         FOR j:=1 TO n DO
            IF M[k,j] THEN M[i,j]:=TRUE END;
         END;
      END;
   END;
END;
```

Planare Graphen

Def: Ein Graph heißt **planar**, wenn er sich in der Ebene so zeichnen läßt, dass sich keine zwei Kanten überkreuzen.

Satz: (Euler, 1752) In jedem zusammenhängenden, planaren Graphen gilt:

$$\text{Knotenzahl} - \text{Kantenzahl} + \text{Regionenzahl} = 2$$

Zeichnen eines zusammenhängenden, planaren Graphen:

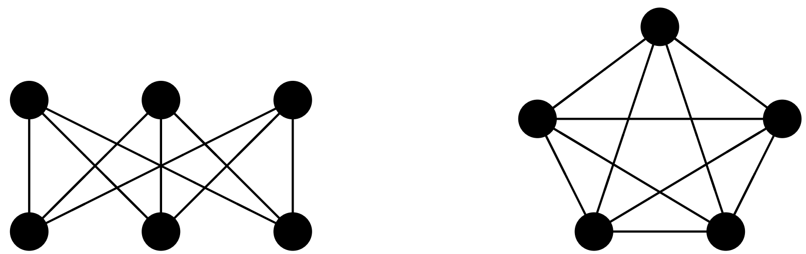
Als mögliche Schritte kommen in Frage:

1. (Als erster Schritt) Das Plazieren eines Knotens;
2. Die Unterteilung einer Kante durch einen neuen Knoten;
3. Die Verbindung zweier schon vorhandener Knoten durch eine Kante, die hierbei keine andere Kante schneidet;
4. Das Ansetzen einer neuen Kante mit einem neuen Endknoten an einen schon vorhandenen Knoten.

Satz: Ein planarer Graph $G = (V, E)$ hat höchstens $3|V| - 6$ Kanten.

Satz: Ein planarer Graph $G = (V, E)$ hat einen Knoten mit Grad höchstens 5.

Satz: (Kuratowski, 1930) Ein Graph ist genau dann planar, wenn er nach Kontraktion “überflüssiger Kanten” keinen der folgenden beiden Teilgraphen enthält:



Die die Kontraktion einer Kante (u, v) bedeutet, dass man die Kante entfernt und beide Endpunkte u und v als einen einzigen Knoten (mit den Nachbarn von u und v) betrachtet.

Färbbarkeit

Eine **Färbung** eines Graphen $G = (V, E)$ mit k Farben ist eine Abbildung $f : V \longrightarrow \{1, \dots, k\}$, so dass für alle Kanten $\{u, v\} \in E$ gilt $f(u) \neq f(v)$.

Die **chromatische Zahl** eines Graphen G, die wir mit $\chi(G)$ bezeichnen, ist definiert als das kleinste k, so dass G mit k Farben färbbar ist.

Das Vier-Farben-Problem: Ist jeder planare Graph 4-färbbar?

Satz: (K. Appel, W. Haken, 1976) Jeder planare Graph ist 4-färbbar.

Matchings

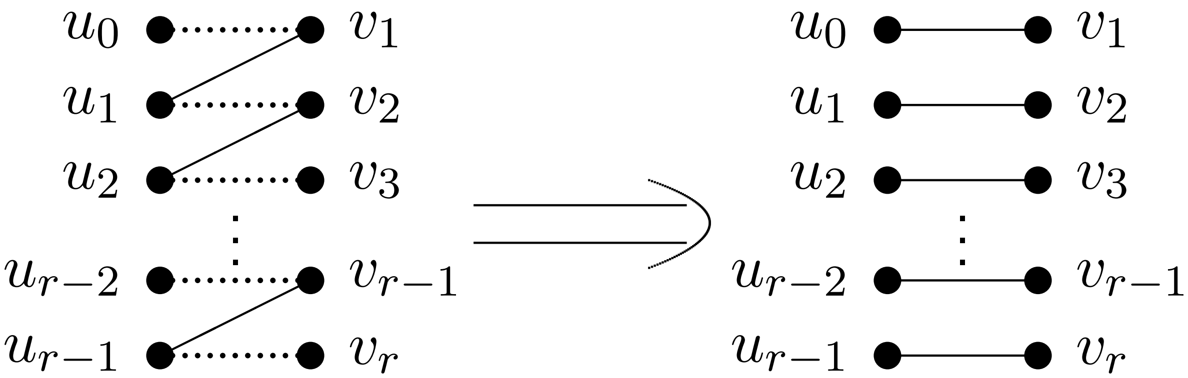
Def: Ein **Matching** in einem Graphen ist eine Teilmenge $M \subseteq E$ der Kanten, so dass keine zwei Kanten einen Endknoten gemeinsam haben.

Ein Matching M heißt **perfekt**, falls durch die Kanten in M *alle* Knoten des Graphen erfaßt werden.

Matchings bei bipartiten Graphen

Sei $N(A)$ die Menge der Nachbarn einer Knotenmenge A.

Satz: (Hall, 1935) Sei der bipartite Graph $G = (V_1 + V_2, E)$ gegeben.
Dann gibt es ein Matching M mit $|M| = |V_1|$ genau dann, wenn
$|N(A)| \geq |A|$ für alle Teilmengen A von V_1 gilt.


u_0 v_1
u_1 v_2
u_2 v_3
u_{r-2} v_{r-1}
u_{r-1} v_r
u_0 v_1
u_1 v_2
u_2 v_3
u_{r-2} v_{r-1}
u_{r-1} v_r