

Dörn, Sebastian

Selbstvermeidende Irrfahrten

Im hyperdimensionalen Gitter Z^d

DIPLOMARBEIT

HOCHSCHULE MITTWEIDA (FH)

UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich: Mathematik/Physik/Informatik

Mittweida, 2004

Dörn, Sebastian

Selbstvermeidende Irrfahrten

Im hyperdimensionalen Gitter Z^d

eingereicht als

DIPLOMARBEIT

an der

HOCHSCHULE MITTWEIDA (FH)

UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich: Mathematik/Physik/Informatik

Mittweida, 2004

Erstprüfer: Prof. Dr. rer. nat. Peter Tittmann

Zweitprüfer: Prof. Dr. rer. nat. Klaus Dohmen

vorgelegte Arbeit wurde verteidigt am: 24.08.2004

Dörn, Sebastian:

Selbstvermeidende Irrfahrten, Im hyperdimensionalen Gitter Z^d .-2004.-75S. Mittweida, Hochschule Mittweida (FH) - University of Applied Sciences, Fachbereich Mathematik/Physik/Informatik, Diplomarbeit, 2004

Referat:

Ziel der Diplomarbeit ist es, selbstvermeidende Irrfahrten im hyperdimensionalen Gitter Z^d zu untersuchen. Eine wichtige Frage hierbei ist die Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten der Länge N von einem gegebenen Punkt aus. Nach einer Einführung in das Thema der selbstvermeidenden Irrfahrten werden Untergraphen des Z^2 diskutiert, für welche sich erzeugende Funktionen für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten in diesen Graphen herleiten lassen. Desweiteren wird vorgestellt, wie mittels Automaten sich Irrfahrten beschreiben lassen, die keine Kurzyklen enthalten. Anschließend wird erläutert, wie mit Hilfe der Lace Expansion eine Formel für die erzeugende Funktion der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten zwischen zwei Punkten $x, y \in Z^d$ aufgestellt wird. Zuletzt erfolgt eine Einordnung des Problems der Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten der Länge N zwischen zwei Punkten des Z^2 in die Komplexitätstheorie und im besonderen in die Klasse der #P-vollständigen Probleme.

Vorwort

Die vorliegende Diplomarbeit bildet den Abschluss meines Studiums der Angewandten Mathematik an der Hochschule Mittweida.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Peter Tittmann, der mir dieses interessante Thema zur Verfügung gestellt hat und mir mit Rat hilfreich zur Seite stand. Ebenso großen Dank schulde ich Herrn Prof. Dr. Klaus Dohmen, der als Zweitprüfer diese Arbeit betreut hat.

Im Weiteren möchte ich meinen Eltern und meinen Großeltern danken, die mich immer unterstützt und ermutigt haben.

Mittweida, Juli 2004

Sebastian Dörn

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Vorbetrachtungen	3
2.1	Graphen	3
2.2	Wörter	4
3	Selbstvermeidende Irrfahrten	6
3.1	Einführung und Überblick	6
3.1.1	Grundlegende Definitionen	6
3.1.2	Anzahlproblem	7
3.1.3	Beschreibungsformen	9
3.2	Bindungskonstante	10
3.2.1	Asymptotisches Wachstum	10
3.2.2	Existenz der Bindungskonstante	11
3.3	Spezialfälle selbstvermeidender Irrfahrten im Z^2	12
3.3.1	Gitterstreifen	12
3.3.2	Aufspannender Untergraph	15
4	Automaten und Irrfahrten	20
4.1	Deterministischer Automat	20
4.1.1	Begriffe und Definitionen	20
4.1.2	Erzeugende Funktion	21
4.1.3	Vermeidung von Kurzzyklen	23
4.2	Kellerautomat	26
4.2.1	Begriffe und Definitionen	26
4.2.2	Erzeugende Funktion	27
4.2.3	Vermeidung von Kurzzyklen	30
4.3	Sprachtyp der selbstvermeidenden Irrfahrten	32
5	Lace Expansion	34
5.1	Inklusion-Exklusion	34
5.1.1	Allgemeines Prinzip der Inklusion-Exklusion	34
5.1.2	Anwendung der Inklusion-Exklusion	35

5.2	Algebraische Ableitung	38
5.2.1	Einige wichtige Definitionen	38
5.2.2	Abstract Lace Expansion	42
5.2.3	Ableitung einer Formel für $G_z(0, x; \tau)$	45
6	Anwendung der Lace Expansion	49
6.1	Expansion für Gitterbäume	49
6.2	Expansion für Gittertiere	53
7	Komplexität des Anzahlproblems	57
7.1	Wichtige Komplexitätsklassen	57
7.1.1	Entscheidungsprobleme	57
7.1.2	Zählprobleme	60
7.2	Beweis der #P-Vollständigkeit	61
	Thesen	66
	Literaturverzeichnis	67
	Abbildungsverzeichnis	69
	Symbolverzeichnis	70
	Index	73

Kapitel 1

Einleitung

Eine selbstvermeidende Irrfahrt ist ein Weg in einem hyperdimensionalen Gitter Z^d , welche keinen Punkt des Gitters mehrfach besucht. Ein hyperdimensionales Gitter Z^d ist ein Graph im d -dimensionalen Euklidischen Raum R^d , dessen Knoten die ganzzahligen Koordinatenpunkte des R^d sind, wobei je zwei Knoten vom Abstand eins durch eine Kante verbunden sind. Die selbstvermeidende Irrfahrt ist ein mathematisches Modell, das wichtige Anwendungsbereiche in der statistischen Mechanik und Chemie hat.

Eine wichtiges Problem ist hierbei die Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten der Länge N von einem gegebenen Punkt des d -dimensionalen Gitters aus. Dieses Problem ist sehr schwierig und man kann diese Werte nur für kleine N bestimmen. Schon für das zweidimensionale Gitter ist kein effizienter Algorithmus zur Berechnung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten gegebener Länge N bekannt.

Ein interessante Fragestellung hierbei ist, ob eine erzeugende Funktion $C(z)$

$$C(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + c_4z^4 + c_5z^5 + \dots$$

existiert, in deren Reihenentwicklung die Koeffizienten c_N die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten der Länge N vom Ursprung 0 des Z^d angeben. Die Existenz einer solchen Funktion muss jedoch noch nicht die effektive Berechnung der Terme c_N gewährleisten. Das Aufstellen erzeugender Funktionen für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten ist bis jetzt nur für spezielle Untergraphen des zweidimensionalen Gitters, beispielsweise bei Gitterstreifen, möglich.

Eine andere Möglichkeit ist das Zählen von Irrfahrten, die keine Kurzzyklen enthalten. Das gelingt mit der Theorie der endlichen Automaten und man erhält damit obere Schranken für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten im Z^2 . Gewöhnliche Irrfahrten, also Irrfahrten die nicht notwendigerweise selbstvermeidend sein müssen, können mittels Markovketten modelliert werden und sind Gegenstand der Wahrscheinlichkeitstheorie. In dieser Arbeit wollen wir uns jedoch hauptsächlich mit kombinatorischen Fragestellungen beschäftigen.

Diese Diplomarbeit ist wie folgt gegliedert: Im Kapitel 2 wiederholen wir verschiedene Begriffe aus der Graphentheorie und Notationen zu Wörtern und Sprachen. Leser mit entsprechenden Kenntnissen auf diesen Gebieten können dieses Kapitel überspringen.

Im Kapitel 3 erfolgt eine Einführung in das Thema der selbstvermeidenden Irrfahrten. Es werden zwei verschiedene Untergraphen des Z^2 diskutiert, für welche sich erzeugende Funktionen für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten herleiten lassen. Das erste ist eine Methode von Zeilberger [Zei95], mit der man für einen unendlichen Gitterstreifen die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten aufstellen kann. Die zweite Variante ist eine eigene Konstruktion für einen Untergraphen des Z^2 , der alle Knoten, aber nicht alle Kanten des zweidimensionalen Gitters enthält.

In Kapitel 4 stellen wir dar, wie sich Automaten zur Bestimmung der erzeugenden Funktion für Irrfahrten einsetzen lassen, die keine Kurzzyklen enthalten. Wir definieren zuerst zwei verschiedene Automatenmodelle und geben Beispiele an, wie sich damit Irrfahrten beschreiben lassen, die keine Kurzzyklen enthalten. Im Weiteren erläutern wir die Konstruktion der erzeugenden Funktion aller der vom Automaten akzeptierten Wörter und damit auch die Anzahl aller Irrfahrten ohne Kurzzyklen.

In Kapitel 5 wird eine Formel für die erzeugende Funktion der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten zwischen zwei Punkten $x, y \in Z^d$ aufgestellt. Diese Formel wird zuerst aus dem Prinzip der Inklusion-Exklusion abgeleitet. Im zweiten Teil erfolgt eine alternative Ableitungsmöglichkeit mittels Lace Expansion.

Im Kapitel 6 werden Anwendungen der Lace Expansion diskutiert. Wir werden die Expansion für die erzeugende Funktion von Gitterbäumen und Gittertieren herleiten.

Im Kapitel 7 erfolgt eine Einordnung des Problems der Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten der Länge N zwischen zwei Punkten $x, y \in Z^2$ in die Komplexitätstheorie. Zuerst führen wir wichtige Komplexitätsklassen für Entscheidungs- und Zählprobleme ein. Im zweiten Teil dieses Kapitels stellen wir einen Teil des Beweises von Liskiewicz, Ogihara und Toda [LOT01] vor, dieser beinhaltet, dass die Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten der Länge N zwischen zwei Punkten $x, y \in Z^2$ in die Klasse der $\#P$ -vollständigen Probleme gehört. Danach werden noch einige Schlussfolgerungen aus diesem Ergebnis genannt.

Kapitel 2

Vorbetrachtungen

In diesem Kapitel besprechen wir verschiedene Grundbegriffe aus der Graphentheorie und der Diskreten Mathematik. Die Notationen aus der Graphentheorie stimmen mit denen von Tittmann [Tit03] überein.

2.1 Graphen

Definition 2.1.1 Ein **ungerichteter Graph** $G = (V, E)$ besteht aus einer **Knotenmenge** $V = V(G)$ und einer **Kantenmenge** $E = E(G)$, wobei jeder Kante $e \in E(G)$ zwei (nicht notwendig verschiedene) Knoten aus $V(G)$ zugeordnet sind. Eine Kante mit zwei Endknoten u und v wird in der Form $e = \{u, v\}$ beschrieben. Zwei Knoten $u, v \in V$, die durch eine Kante $e = \{u, v\}$ verbunden sind, heißen **adjazent**. Wenn v ein Endknoten der Kante e ist, so heißt v **inzident** zu e . Eine Kante $e = \{u, v\}$, für welche die Endknoten zusammenfallen, heißt **Schlinge**. Zwei Kanten $e = \{u, v\}$ und $f = \{u, v\}$ zwischen denselben Endknoten heißen **parallel**. Ein Graph, der weder Schlingen noch parallele Kanten besitzt, heißt **schlichter Graph**. Der **Grad** $\deg v$ eines Knotens $v \in V(G)$ ist die Anzahl der zu v inzidenten Kanten von G .

Ein **gerichteter Graph** $G = (V, E)$ besteht aus einer Knotenmenge $V = V(G)$ und einer Bogenmenge $E = E(G)$, sodass jedem Bogen (gerichtete Kante) $e = (u, v)$, $u, v \in V$ ein geordnetes Paar von Knoten aus V zugeordnet ist. Der Knoten u heißt Anfangsknoten, v der Endknoten des Bogens $e = (u, v)$. Ein **r -regulärer Graph** ist ein Graph, dessen Knoten alle den Grad r besitzen. Eine Darstellung eines Graphen G in der Ebene ohne Kantenüberkreuzungen nennt man **planare Einbettung** von G . Ein Graph, der eine planare Einbettung besitzt, heißt **planarer Graph**.

Eine **Kantenfolge** ist eine Folge

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$$

von Knoten $v_i \in V$ und Kanten $e_i \in E$ eines Graphen G , sodass die Kante e_i für $i = 1, \dots, k - 1$ jeweils die Endknoten v_i und v_{i+1} besitzt. Die **Länge** der

Kantenfolge ist die Anzahl der Kanten dieser Folge. Eine Kantenfolge in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein **Weg**, wenn jeder Knoten aus V höchstens einmal in dieser Folge auftritt. Gilt $v_1 = v_k$ in der Kantenfolge $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$ so spricht man von einer **geschlossenen Kantenfolge**. Kommt, mit Ausnahme von v_k , kein Knoten doppelt in der geschlossenen Kantenfolge vor, so bildet diese Folge einen **Kreis** des Graphen. Ein **Hamiltonkreis** eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Kreis von G , der alle Knoten aus V enthält. Ein **Hamiltonweg** in einem Graphen ist ein Weg, der alle Knoten des Graphen durchläuft.

Ein Graph $H = (W, F)$ ist ein **Untergraph** des Graphen $G = (V, E)$, wenn $W \subseteq V$ und $F \subseteq E$ gilt. Ein **aufspannender Untergraph** $H = (V, F)$ eines Graphen $G = (V, E)$ besitzt dieselbe Knotenmenge wie der Ausgangsgraph G . Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **zusammenhängend**, wenn zwischen je zwei Knoten u und v seiner Knotenmenge ein Weg existiert. Ein maximal zusammenhängender Untergraph eines Graphen G heißt eine **zusammenhängende Komponente** von G .

Das **Entfernen einer Kante** $e \in E$ erzeugt einen neuen Graphen $G_{-e} := (V, E \setminus \{e\})$. Für einen Knoten $v \in V$ sei G_{-v} der Graph, der aus G durch **Entfernen eines Knotens** v hervorgeht. Das Entfernen eines Knotens v schließt hierbei das gleichzeitige Entfernen aller zu v inzidenten Kanten des Graphen ein.

Es sei $c(G)$ die Anzahl der zusammenhängenden Komponenten eines Graphen G . Eine Kante $e \in E$ eines Graphen $G = (V, E)$ mit der Eigenschaft $c(G_{-e}) > c(G)$ nennt man **Brücke** von G . Ein Knoten $v \in V$ mit der Eigenschaft $c(G_{-v}) > c(G)$ bezeichnet man als **Artikulation** von G .

2.2 Wörter

Definition 2.2.1 Es sei Σ eine endliche Menge, die man als **Alphabet** bezeichnet. Die Elemente von Σ nennt man **Buchstaben**. Ein **Wort** a über Σ ist eine Folge

$$a = a_1 a_2 \cdots a_n$$

von Buchstaben $a_i \in \Sigma$. Die Anzahl $|a|$ der Buchstaben eines Wortes a nennt man **Länge** von a . Das Wort der Länge null heißt **leeres Wort** und man bezeichnet dies mit ϵ . Es ist

$$\Sigma^n := \{a_1 a_2 \cdots a_n \mid a_i \in \Sigma, i = 1, \dots, n\}$$

die Menge aller Wörter der Länge n und

$$\Sigma^* := \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n$$

die Menge aller Wörter über Σ . Die **Verkettung** der Wörter

$$a = a_1a_2 \cdots a_n \quad \text{und} \quad b = b_1b_2 \cdots b_n$$

liefert das Wort

$$ab = a_1a_2 \cdots a_nb_1b_2 \cdots b_n.$$

Für das leere Wort ϵ gilt $a\epsilon = \epsilon a = a$, $a \in \Sigma^*$. Ein Wort $v \in \Sigma^*$ heißt **Unterwort** eines Wortes a , falls man a in der Form $a = uvx$ mit $u, x \in \Sigma^*$ schreiben kann. Jede Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **Sprache** über dem Alphabet Σ . Es seien L_1, \dots, L_n Sprachen über dem Alphabet Σ . Dann ist

$$L_1 \cdots L_n := \{l_1 \cdots l_n \mid l_1 \in L_1, \dots, l_n \in L_n\}$$

die **Verkettung** von L_1 bis L_n .

Definition 2.2.2 Es sind M_1, M_2 Mengen, dann sei $|M_1|$ oder $\#M_1$ die Anzahl der Elemente in M_1 und $\mathcal{P}(M_1)$ die Menge aller Teilmengen von M_1 . Mit \emptyset bezeichnen wir die leere Menge. Weiterhin seien

$$\begin{aligned} M_1 \setminus M_2 &:= \{x \in M_1 \mid x \notin M_2\}, \\ \llbracket a, b \rrbracket &:= \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b\}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \\ (a, b) &:= \{x \in \mathbb{Z} \mid a < x < b\}, \quad a, b \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

die Mengendifferenz, das abgeschlossene und das offene ganzzahlige Intervall. Mit I definieren wir eine Indikatorfunktion der Form

$$I[\text{Aussage}] = \begin{cases} 1, & \text{falls Aussage} = \text{Wahr} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Kapitel 3

Selbstvermeidende Irrfahrten

Selbstvermeidende Irrfahrten sind Wege in einem Graphen. In dieser Arbeit werden wir uns mit dem höherdimensionalen Gittergraphen beschäftigen, in welchen die Irrfahrten stattfinden. In diesem Kapitel erhält der Leser eine Einführung in das Thema der selbstvermeidende Irrfahrten, weiterführende Informationen dazu findet man in Madras und Slade [MS96].

3.1 Einführung und Überblick

3.1.1 Grundlegende Definitionen

Definition 3.1.1 Ein **hyperdimensionales Gitter** Z^d ist ein Graph im d -dimensionalen Euklidischen Raum R^d , dessen Knoten die ganzzahligen Koordinatenpunkte des R^d sind, wobei je zwei Knoten vom Abstand eins durch eine Kante verbunden sind.

Definition 3.1.2 Das Skalarprodukt $(x, y)_s$ mit $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ und $y = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in Z^d$ des Euklidischen Raumes R^d sei

$$(x, y)_s := \sum_{i=1}^d x_i y_i,$$

mit der dazugehörigen Euklidischen Norm $\|x\| = \sqrt{(x, x)_s}$.

Definition 3.1.3 Eine **gewöhnliche Irrfahrt** (kurz: **Irrfahrt**) w im Z^d , beginnt an einem Punkt $x \in Z^d$ und ist definiert als eine Folge

$$w = (w(0), w(1), \dots, w(N))$$

mit $w(i) = (w_1(i), w_2(i), \dots, w_d(i)) \in Z^d$ und $w(0) = x$ welche die Eigenschaft

$$\|w(i+1) - w(i)\| = 1, \quad i = 0, \dots, N-1$$

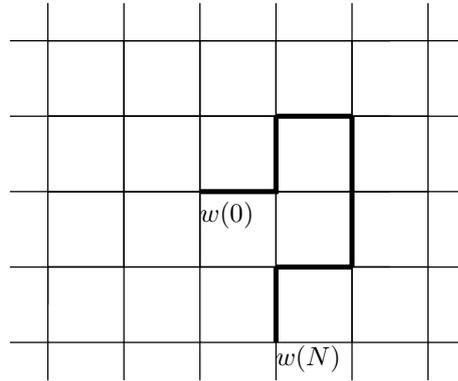


Abbildung 3.1: Selbstvermeidende Irrfahrten im Z^2

erfüllt. Die **Länge** von w ist die Anzahl der Elemente der Folge w minus eins. Eine Irrfahrt heißt **selbstvermeidend**, wenn zusätzlich die Eigenschaft

$$w(i) \neq w(j), \forall i, j \in \llbracket 0, N \rrbracket, i \neq j$$

gilt. Mit $|w|$ sei die Länge von w bezeichnet.

Die Abbildung 3.1 zeigt eine selbstvermeidende Irrfahrt der Länge 7 im zweidimensionalen Gitter Z^d .

Definition 3.1.4 Eine Irrfahrt $w = (w(0), w(1), \dots, w(N))$ der Länge N besitzt einen **Kreis** bzw. **Zyklus** der Länge $k \in \mathbb{N}$, falls Indizes $i, j \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $i < j$ existieren mit $j - i = k$ und $w(i) = w(j)$. Eine Irrfahrt w der Länge N heißt **selbstvermeidender Kreis** der Länge N , wenn $w(0) = w(N)$ und die Irrfahrt sonst überall selbstvermeidend ist.

Bemerkung 3.1.5 Kreise können im Z^d nur in gerader Länge auftreten. Eine Irrfahrt ist genau dann selbstvermeidend, wenn sie keinen Kreis besitzt.

3.1.2 Anzahlproblem

Von großem Interesse in der Thematik der selbstvermeidenden Irrfahrten ist die Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten der Länge N im d -dimensionalen Gitter.

Definition 3.1.6 Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $v \in V$. Mit $s_N(G, v)$ ist die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten im Graphen G der Länge N definiert, die vom Knoten v ausgehen. Falls $G = Z^d$ und die Irrfahrt im Ursprung 0 startet, sei $\mathcal{C}_{N,d}$ die Menge aller selbstvermeidenden Irrfahrten der Länge N und $c_{N,d} := |\mathcal{C}_{N,d}|$. Falls kein spezielles d vorgegeben ist, schreiben wir zur Abkürzung von $\mathcal{C}_{N,d}$ auch \mathcal{C}_N und $c_N := |\mathcal{C}_N|$.

Wir vereinbaren, dass es genau eine selbstvermeidende Irrfahrt der Länge null gibt.

Satz 3.1.7 *Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, $v \in V$ und $\Gamma(G, v)$ sei die Menge aller adjazenten Knoten von v in G . Dann gilt:*

$$s_N(G, v) = \sum_{w \in \Gamma(G, v)} s_{N-1}(G_{-v}, w).$$

Beweis. Vom Knoten v kann die selbstvermeidende Irrfahrt nur zu einem der Nachbarknoten $w \in \Gamma(G, v)$ führen. Das Löschen der bereits besuchten Knoten sichert, dass die Irrfahrt selbstvermeidend ist. ■

Beispiel 3.1.8 Die ersten Zahlen der Folge $\{c_{N,2}\}_{N \geq 1}$ lassen sich noch leicht durch Fallunterscheidung oder durch Verwendung von Satz 3.1.7 finden.

Vom Ursprung hat man genau vier verschiedene Möglichkeiten für den ersten Schritt. Nach jedem weiteren Schritt genau drei, da man nicht zu den vorhergehenden Knoten zurückkehren darf. Bereits ab der Berechnung von $c_{4,2}$ müssen aber weitere Bedingungen beachtet werden. So können z.B. Kreise auftreten oder die Irrfahrt endet in einer ‘‘Sackgasse‘‘, das ist ein Knoten, dessen Nachbarn alle schon besucht wurden. Die ersten Werte der Folge $\{c_{N,2}\}_{N \geq 1}$ sind:

N	$c_{N,2}$	N	$c_{N,2}$
0	1	5	284
1	4	6	780
2	12	7	2172
3	36	8	5916
4	100	9	16268

Definition 3.1.9 Es sei

$$C_d(z) := \sum_{N \geq 0} \sum_{w \in \mathcal{C}_{N,d}} z^{|w|} = \sum_{N \geq 0} c_{N,d} z^N$$

die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten im Z^d vom Ursprung 0 aus.

Bemerkung 3.1.10 Die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten lässt sich nur für kleine N bestimmen.¹ Der Grund dafür ist, dass der Rechenaufwand für dieses Problem erheblich steigt, je größer N wird. Bereits für das zweidimensionale Gitter ist kein effizienter Algorithmus zur Berechnung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten gegebener Länge N bekannt.

¹Der aktuelle Stand liegt bei Anfertigung dieser Arbeit bei $N = 71$ im zweidimensionalen Gitter.

Auch die Bestimmung des asymptotischen Wachstums der Folge $\{c_{N,d}\}_{N \geq 1}$ ist sehr aufwendig. Hierbei sind besonders untere und obere Schranken für diese Folge von Interesse. Eine besonders einfache Schranke wird in dem nachfolgendem Satz gezeigt.

Satz 3.1.11 *Im Z^d gilt:*

$$d^N \leq c_{N,d} \leq 2d(2d-1)^{N-1}.$$

Beweis. Die obere Schranke erhalten wir durch alle gewöhnlichen Irrfahrten w der Länge N für die $w(i) \neq w(i+2)$, $i = 0, \dots, N-2$ gilt. Davon gibt es im Z^d genau $2d(2d-1)^{N-1}$ viele, da wir für den ersten Schritt genau $2d$ Richtungen auswählen können und für alle weiteren $N-1$ Schritte dann noch $(2d-1)^{N-1}$ Möglichkeiten für den weiteren Verlauf der Irrfahrt besitzen.

Die untere Schranke ist die Anzahl aller d -dimensionalen positiven Koordinatenrichtungen, diese sind notwendigerweise selbstvermeidend. ■

3.1.3 Beschreibungsformen

Im Folgenden zeigen wir verschiedene Möglichkeiten auf, wie selbstvermeidende Irrfahrten in einem Gitter Z^d beschrieben werden können.

Definition 3.1.12 Eine **absolute Beschreibung** einer Irrfahrt

$$w = (w(0), \dots, w(N))$$

der Länge N die im Ursprung 0 des Z^d startet ($w(0) = 0$), wird der Punkt $w(i)$, indem sich die Irrfahrt im Schritt i befindet, in Bezug auf den Ursprung beschrieben.

Beispiel 3.1.13 Es sei $d = 2$ und w eine selbstvermeidende Irrfahrt im Z^d , die im Ursprung 0 startet (Abbildung 3.2). In diesem Fall erhält man eine absolute Beschreibungsform durch die Koordinaten

$$w = ((0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (2, 0), (2, -1), (1, -1), (1, -2)).$$

Definition 3.1.14 Bei einer **relativen Beschreibung** einer Irrfahrt w im Z^d mit Startpunkt im Ursprung, wird der aktuelle Punkt $w(i)$ in Bezug auf den vorangegangenen Punkt $w(i-1)$ beschrieben.

Bemerkung 3.1.15 Bei einer absoluten Beschreibungsform der Irrfahrt w genügt die Angabe von $w(i)$ um den Ort der Irrfahrt im Schritt i zu lokalisieren. Bei einer relativen Beschreibungsform sind dazu alle vorangegangenen Punkte notwendig.

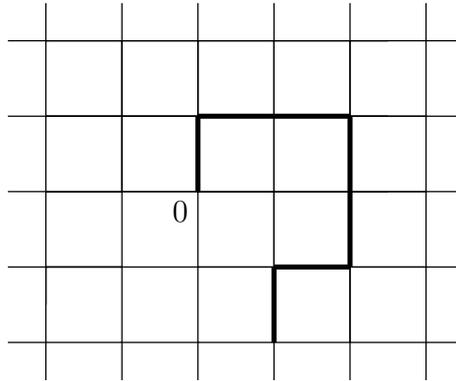


Abbildung 3.2: Selbstvermeidende Irrfahrt der Länge 7

Beispiel 3.1.16 Eine relative Beschreibungsform einer Irrfahrt w im Z^2 kann man als ein Wort über den Alphabet $\Sigma = \{r, l, o, u\}$ angeben. Dabei stehen die Abkürzungen r, l, o und u für die Bewegungsrichtungsrichtung der Irrfahrt um eine Einheit nach rechts, links, oben und unten.

Für die Irrfahrt w in Abbildung 3.2 erhalten wir mit der relativen Beschreibungsform durch das Alphabet $\Sigma = \{r, l, o, u\}$ das Wort $w = orruulu$.

Vereinbarung: Im Folgenden wollen wir zur Vereinfachung der Notation bei einer Irrfahrt w nicht zwischen Folge und Wort unterscheiden.

3.2 Bindungskonstante

3.2.1 Asymptotisches Wachstum

Definition 3.2.1 [MS96] Es sei

$$\mu := \lim_{N \rightarrow \infty} c_N^{1/N},$$

die **Bindungskonstante (connective constant)**.

Lemma 3.2.2 *Es gilt:*

$$d \leq \mu \leq 2d - 1.$$

Beweis. Anwendung von Satz 3.1.11 in Verbindung mit Definition 3.2.1. ■

These 3.2.3 [MS96]² *Das asymptotische Wachstum der Folge $\{c_N\}_{N \geq 1}$ sei durch*

$$c_N \sim A\mu^N N^{\gamma-1}$$

²Bei wichtigen Sätzen steht in Klammern die Literaturstelle, aus welcher der Satz entnommen wurde. Eigene Sätze bzw. Beweise werden durch das Symbol [*] gekennzeichnet.

bestimmt, wobei A und γ dimensionsabhängige positive Konstanten sind. Die Konstante γ bezeichnet man auch als den **kritischen Exponenten**.

Im Nachfolgenden wollen wir die Existenz der Bindungskonstante zeigen, dazu sind zunächst jedoch noch einige Vorbetrachtungen notwendig.

Definition 3.2.4 Die **Verkettung** $w = w^{(1)} \circ w^{(2)}$ einer selbstvermeidenden Irrfahrt $w^{(1)}$ der Länge M mit einer selbstvermeidenden Irrfahrt $w^{(2)}$ der Länge N ist eine Irrfahrt w der Länge $M + N$, welche im Allgemeinen nicht selbstvermeidend ist. Die Irrfahrt w ist durch

$$\begin{aligned} w(k) &:= w^{(1)}(k), & k = 0, \dots, M \\ w(k) &:= w^{(1)}(M) + w^{(2)}(k - M) - w^{(2)}(0), & k = M + 1, \dots, M + N. \end{aligned}$$

definiert.

Lemma 3.2.5 *Es gilt:*

$$c_{M+N} \leq c_M c_N.$$

Beweis. Das Produkt $c_M c_N$ gibt die Anzahl aller Irrfahrten der Länge $M + N$ an, für welche die ersten M und die letzten N Schritte selbstvermeidend sind, aber nicht die komplette Irrfahrt. ■

3.2.2 Existenz der Bindungskonstante

Lemma 3.2.6 [MS96] *Es sei $\{a_n\}_{n \geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen, welche die Eigenschaft der Subadditivität $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ erfüllen. Dann ist der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{-1}$ konvergent und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}. \quad (3.1)$$

Beweis. Aufgrund der Eigenschaft der Subadditivität folgt die Konvergenz von $a_n n^{-1}$ für n gegen unendlich. Wir zeigen zunächst:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_k}{k}, \quad k \geq 1. \quad (3.2)$$

Für ein festes k definieren wir

$$A_k := \max_{1 \leq r \leq k} a_r.$$

Weiterhin sei $n = jk + r$ für $1 \leq r \leq k$. Durch Verwendung der Eigenschaft der Subadditivität für a_n erhalten wir

$$a_n \leq a_{jk} + a_r \leq ja_k + a_r \leq \frac{n}{k} a_k + A_k.$$

Durch Division von n und Grenzbetrachtung für $n \rightarrow \infty$ folgt (3.2). Durch Bilden von $\inf_{k \geq 1}$ erhalten wir den Grenzwert (3.1). ■

Satz 3.2.7 [MS96] *Der Grenzwert der Bindungskonstanten*

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} c_N^{1/N}$$

existiert.

Beweis. Aus

$$\log c_{N+M} \leq \log c_N c_M = \log c_N + \log c_M$$

sehen wir, dass die Folge $\{\log c_N\}_{N \geq 1}$ die Eigenschaft der Subadditivität erfüllt. Damit können wir das vorangehende Lemma anwenden und erhalten

$$\log \mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log c_N}{N} = \inf_{N \geq 1} \frac{\log c_N}{N}. \quad (3.3)$$

Daraus folgt die Existenz des Grenzwertes der Bindungskonstanten. ■

Folgerung 3.2.8 *Aus (3.3) erhalten wir die Abschätzung:*

$$\mu^N \leq c_N, \quad N \geq 1.$$

3.3 Spezialfälle selbstvermeidender Irrfahrten im zweidimensionalen Gitter

Ein offenes Problem ist, ob eine erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten der Länge N vom Ursprung 0 des Z^2 existiert. Aufgrund der Schwierigkeit dieses Problems, beschränkt man sich auf das Aufstellen erzeugender Funktionen für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten in speziellen Untergraphen des zweidimensionalen Gitters.

In diesem Abschnitt wollen wir für zwei Untergraphen des Z^2 die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten in diesen Graphen aufstellen. Dies ist nur möglich, weil wir das zweidimensionale Gitter erheblich verkleinern, beispielsweise durch Beschränkung auf einen Gitterstreifen oder durch Entfernen von Kanten.

3.3.1 Gitterstreifen

In diesem Abschnitt zeigen wir eine Methode zur Aufstellen der erzeugenden Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidende Irrfahrt in einem Gitterstreifen. Dieser Spezialfall wurde von Zeilberger [Zei95] entwickelt.

Definition 3.3.1 [Zei95] Es sei $c_N^{[0,1]}$ die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten der Länge N im zweidimensionalen Gitter $[0, 1] \times (-\infty, \infty)$, die vom Ursprung 0 starten.

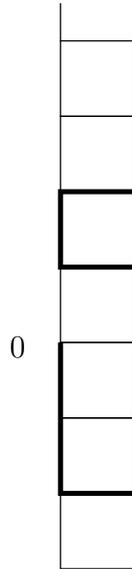


Abbildung 3.3: Gitterstreifen

Die Abbildung 3.3 zeigt den Gitterstreifen $\llbracket 0, 1 \rrbracket \times (-\infty, \infty)$, in dem sich die selbstvermeidenden Irrfahrten bewegen.

Definition 3.3.2 Es sei $\{F_n\}_{n \geq 0}$ die Folge der **Fibonacci Zahlen**, die sich rekursiv aus $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ mit den Anfangswerten $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ berechnen.

Lemma 3.3.3 [Tit00] *Die explizite Darstellung für die Folge der Fibonacci Zahlen $\{F_n\}$ lautet*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Diese explizite Darstellung der Fibonacci Zahlen wird auch als Binet'sche Form nach Jacques Binet bezeichnet.

Satz 3.3.4 [Zei96] *Es gilt:*

$$c_N^{[0,1]} = 8F_N - \frac{N}{2}(1 + (-1)^N) - 2(1 - (-1)^N), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Wir werden im Folgenden mit dem Alphabet $\{r, l, u, o\}$ die selbstvermeidenden Irrfahrten beschreiben. Die Buchstaben stehen hierbei für die Richtung der einzelnen Schritte, die jeweils um eine Einheit nach rechts (r), links (l), unten (u) oder oben (o) verlaufen. Weiterhin sei u^i eine selbstvermeidende Irrfahrt, die

i Schritte nach unten geht und o^i eine selbstvermeidende Irrfahrt, die i Schritte nach oben geht. Jede selbstvermeidende Irrfahrt in dem Streifen $\llbracket 0, 1 \rrbracket \times (-\infty, \infty)$ lässt sich aus 4 Grundelementen aufbauen:

1. U -Element $U(i) = u^i r o^i$, $i \geq 0$ oder $U = \epsilon$.

Die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten im U -Element lautet

$$1 + z + z^3 + z^5 + \dots = 1 + \frac{z}{1 - z^2}.$$

2. Γ -Element $\Gamma(i) = o^i r$ oder $\Gamma'(i) = o^i l$, $i \geq 1$.

Die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten in einem einzelnen Γ (oder Γ') Element ist $\frac{z^2}{1-z}$. Für eine Folge solcher Elemente ergibt sich

$$\frac{1}{1 - \frac{z^2}{1-z}} = \frac{1-z}{1-z-z^2}.$$

3. I -Element $I(i) = o^i$, $i \geq 0$.

Hier erhalten wir die erzeugende Funktion

$$\frac{1}{1-z}$$

für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten im I -Element.

4. \cap -Element $\cap(i) = o^{i+1} l u^i$, $i \geq 1$ oder $\cap = \epsilon$ bzw. $\cap'(i) = o^{i+1} r u^i$, $i \geq 1$ oder $\cap' = \epsilon$.

Für dieses Element ergibt sich die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten im \cap -Element (oder \cap' -Element) zu

$$1 + z^4 + z^6 + z^8 + \dots = 1 + \frac{z^4}{1 - z^2}.$$

Die gesamten selbstvermeidenden Irrfahrten lassen sich nun durch

$$U \times \text{Folge}(\Gamma \text{ oder } \Gamma') \times I \times (\cap \text{ oder } \cap')$$

beschreiben, wobei \times die Verkettung der Teilwege symbolisiert. Daraus erhalten wir die erzeugende Funktion

$$\left(1 + \frac{z}{1 - z^2}\right) \left(\frac{1 - z}{1 - z - z^2}\right) \left(\frac{1}{1 - z}\right) \left(1 + \frac{z^4}{1 - z^2}\right) = \frac{(1 + z - z^2)(1 - z^2 + z^4)}{(1 - z^2)^2(1 - z - z^2)}.$$

Diese Funktion liefert jedoch nur die selbstvermeidenden Irrfahrten, die zunächst ein U -Element enthalten und dann beliebig nach oben laufen. Durch Verdoppeln

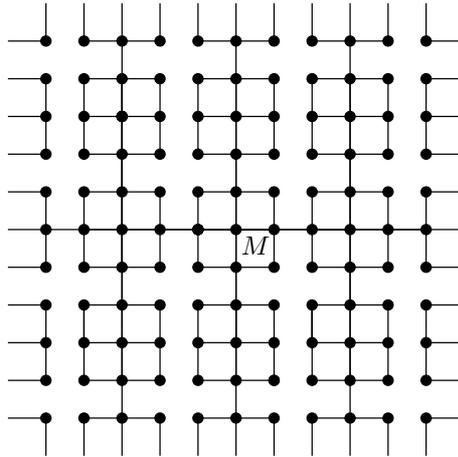


Abbildung 3.4: Brückengraph B

erhalten wir die dazu symmetrisch liegenden Irrfahrten. Wir müssen dabei aber beachten, dass die Irrfahrt mit null Schritten und die Irrfahrt, die nach einem Rechtsschritt endet, doppelt gezählt werden. Somit folgt:

$$c_N^{[0,1]} = [z^N] \left(2 \frac{(1+z-z^2)(1-z^2+z^4)}{(1-z^2)^2(1-z-z^2)} - z - 1 \right).$$

Durch Partialbruchzerlegung ergibt sich

$$c_N^{[0,1]} = \frac{8}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^N - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^N \right] - \frac{N}{2}(1+(-1)^N) - 2(1-(-1)^N)$$

und durch Einsetzen der expliziten Formel für die Fibonacci Zahlen erhalten wir das Ergebnis. ■

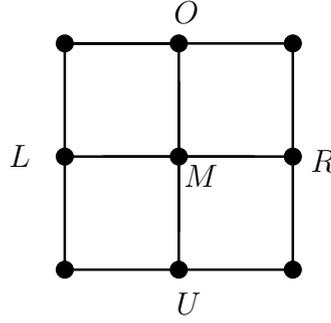
3.3.2 Aufspannender Untergraph

Wir wollen hier die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten für einen aufspannenden Untergraphen des Z^2 aufstellen. ³

Definition 3.3.5 [*] Ein **Brückengraph** B ist der folgende Graph:

Es sei B_3 ein 3×3 Gitter mit Mittelpunkt M . Die mittleren Knoten von der rechten, linken, oberen und unteren Seite dieses Gitters sind durch eine Brücke, mit einer Folge von weiteren 3×3 Gittern verbunden (Abbildung 3.4). Eine Gitterfolge sind dabei 3×3 Gitter, die in der Mitte der oberen bzw. unteren drei

³Die Konstruktion dieses Graphen und der dazugehörigen erzeugenden Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten, basiert auf einer eigenen Idee.

Abbildung 3.5: 3×3 Gitter B_3

Knoten mit einer Kante verbunden sind. Desweiteren gehen von der horizontalen Gitterfolge um M , von jedem dieser Gitter nach oben und unten weitere 3×3 Gitterfolgen ab.

Bemerkung 3.3.6 Die selbstvermeidenden Irrfahrten sollen nun im Knoten M starten. Dieser spezielle Graph besitzt gegenüber dem zweidimensionalen Gitter alle Knoten, aber nicht alle Kanten. Die Kanten wurden weggelassen, um noch die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten in diesem Graphen aufstellen zu können.

Im Folgenden bezeichnet $[z^n]F(z)$ den Koeffizient vor z^n in der formalen Potenzreihe $F(z)$ und $s_N(G, v)$ ist wieder die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten im Graphen G der Länge N , die vom Knoten $v \in V(G)$ ausgehen.

Satz 3.3.7 [*] *Es sei B ein Brückengraph mit Mittelpunkt M . Dann gilt*

$$s_N(B, M) = [z^N] \left(E_M(z) + 4M_R(z) \frac{zE_L(z)}{1 - zL_R(z)} \left(1 + \frac{zL_O(z)}{1 - zL_R(z)} \right) \right)$$

mit

$$E_M(z) := 1 + 4z + 8z^2 + 8z^3 + 8z^4 + 8z^5 + 8z^6 + 8z^7 + 8z^8,$$

$$E_L(z) := 1 + 3z + 5z^2 + 10z^3 + 10z^4 + 16z^5 + 10z^6 + 14z^7,$$

$$M_R(z) := z + 2z^3 + 2z^5 + 2z^7,$$

$$L_R(z) := z^2 + 6z^4 + 2z^6,$$

$$L_O(z) := 2z^2 + 2z^4 + 4z^6.$$

Beweis. Die Herleitung erfolgt in mehreren Schritten.

1. Das Aufstellen der erzeugenden Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten vom Punkt M im 3×3 Gitter B_3 (Abbildung 3.5) erfolgt durch Abzählen. Wir erhalten

$$E_M(z) = 1 + 4z + 8z^2 + 8z^3 + 8z^4 + 8z^5 + 8z^6 + 8z^7 + 8z^8.$$

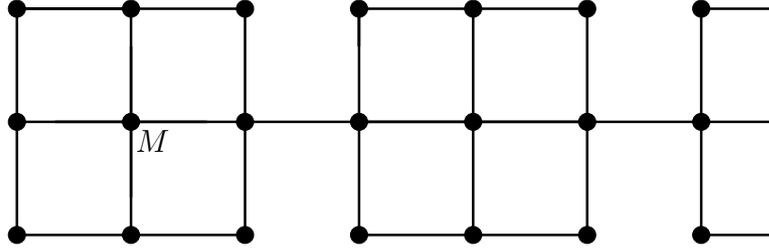


Abbildung 3.6: Gittergraph G_3

Wenn wir statt bei M im Punkt L , R , U oder O starten (Abbildung 3.5), erhalten wir durch Abzählen die erzeugende Funktion

$$E_L(z) = 1 + 3z + 5z^2 + 10z^3 + 10z^4 + 16z^5 + 10z^6 + 14z^7$$

für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten in B_3 , die von den Punkten L , R , U oder O ausgehen.

- Die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten in B_3 die von M nach L , R , U oder O geht ist

$$M_R(z) = z + 2z^3 + 2z^5 + 2z^7.$$

- Die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten in B_3 die von L nach R oder von O nach U geht ist

$$L_R(z) = z^2 + 6z^4 + 2z^6.$$

- Die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten in B_3 die von L nach O oder U geht ist

$$L_O(z) = 2z^2 + 2z^4 + 4z^6.$$

- Zunächst stellen wir die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten im Gittergraph G_3 auf, der nur nach rechts mit weiteren 3×3 Gittern verbunden ist (Abbildung 3.6). Wir erhalten

$$P_1(z) = E_M(z) + M_R(z)zE_L(z) + M_R(z)zE_L(z)(zL_R(z)) + M_R(z)zE_L(z)(zL_R(z))^2 + \dots,$$

dabei zählt der Term $E_M(z)$ die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten im ersten 3×3 Gitter. Der zweite Term zählt die Anzahl der selbstvermeidenden Irrfahrten, die bis in das 2. Gitter kommen, der 3. Term für das 3.

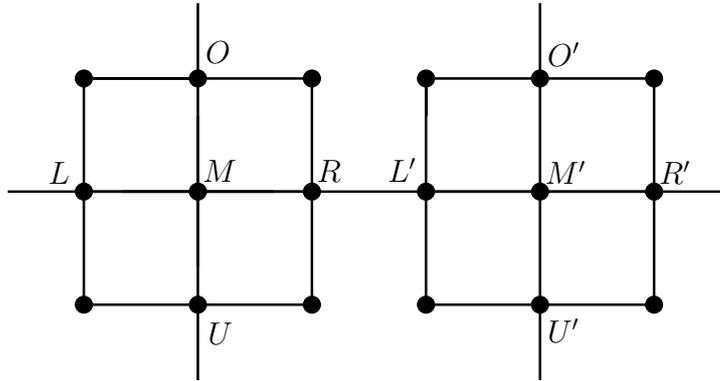


Abbildung 3.7: Ausschnitt aus dem Brückengraph

Gitter usw. Durch Zusammenfassung ergibt sich

$$P_1(z) = E_M(z) + M_R(z) \frac{zE_L(z)}{1 - zL_R(z)}.$$

Wenn wir nun diesen Graphen G_3 auch nach oben, links und unten fortsetzen, erhalten wir

$$P_2(z) = E_M(z) + 4M_R(z) \frac{zE_L(z)}{1 - zL_R(z)}.$$

- Jetzt müssen wir noch alle selbstvermeidenden Irrfahrten von jedem der 3×3 Gitter von G_3 nach oben und unten berücksichtigen, um die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten von M aus im Brückengraph zu bestimmen. Dazu berechnen wir zunächst die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten von M nach O' im Brückengraph B (Abbildung 3.7). Sie lautet

$$M_R(z)zL_O(z).$$

Ab dem Punkt O' haben wir bereits die Anzahl der selbstvermeidenden Irrfahrten bestimmt, diese liefert der Term

$$\frac{zE_L(z)}{1 - zL_R(z)}.$$

Wenn wir alle weiteren 3×3 Gitter berücksichtigen, was durch die Summe $\sum_{n \geq 0} (zL_R(z))^n$ geschieht, so erhalten wir die erzeugende Funktion für die

Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten von M aus im Brückengraphen B durch

$$P(z) = P_2(z) + 4M_R(z)zL_O(z)\frac{zE_L(z)}{1 - zL_R(z)} \sum_{n \geq 0} (zL_R(z))^n.$$

Die Multiplikation mit vier kommt daher, weil wir wieder alle 4 Koordinatenrichtungen beachten müssen. Durch Zusammenfassung ergibt sich

$$P(z) = E_M(z) + 4M_R(z)\frac{zE_L(z)}{1 - zL_R(z)} \left[1 + \frac{zL_O(z)}{1 - zL_R(z)} \right]. \blacksquare$$

Bemerkung 3.3.8 Mit Hilfe des Brückengraphen können wir untere Schranken für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten im Z^2 bestimmen. Die folgende Tabelle zeigt die ersten Werte von $s_N(B, M)$ im Vergleich zu $c_{N,2}$.

N	0	1	2	3	4	5	6
$s_N(B, M)$	1	4	12	20	36	84	132
$c_{N,2}$	1	4	12	36	100	284	780

Kapitel 4

Automaten und Irrfahrten

In diesem Kapitel stellen wir dar, wie sich Automaten zur Bestimmung der erzeugenden Funktion für die Anzahl aller Irrfahrten einsetzen lassen, die keine Kurzzyklen enthalten. Wir definieren zuerst zwei verschiedene Automatenmodelle und geben Beispiele an, wie sich damit Irrfahrten beschreiben lassen, die keine Kurzzyklen beinhalten. Desweiteren erläutern wir die Konstruktion der erzeugenden Funktion aller der vom Automaten akzeptierten Wörter und damit auch die Anzahl aller Irrfahrten ohne Kurzzyklen kleiner k .

4.1 Deterministischer Automat

4.1.1 Begriffe und Definitionen

Definition 4.1.1 [Sch01] Ein **deterministischer Automat** (kurz: **DEA**) ist ein Quintupel

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F).$$

Dabei ist

1. Q eine endliche Menge (**Zustandsmenge**).
2. Σ ist eine endliche Menge (**Eingabealphabet**).
3. $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ ist eine Abbildung (**Übergangsfunktion**).
4. $q_0 \in Q$ ist ein Element von Q (**Anfangszustand**).
5. $F \subseteq Q$ ist eine endliche Menge (**Endzustandsmenge**).

Definition 4.1.2 Die **erweiterte Übergangsfunktion** $\hat{\delta}$ eines DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ wird induktiv definiert durch:

1. $\widehat{\delta}(q, \epsilon) := q, \forall q \in Q,$
2. $\widehat{\delta}(q, xa) := \delta(\widehat{\delta}(q, x), a), \forall q \in Q, \forall x \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma.$

Definition 4.1.3 Es sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA. Dann heißt

$$L(A) := \{x \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(q_0, x) \in F\}$$

die **Sprache** von A . Eine Sprache heißt **regulär**, wenn sie von einem DEA akzeptiert wird, d.h. $L \subseteq \Sigma^*$ ist regulär genau dann, wenn es einen DEA A mit $L = L(A)$ gibt.

4.1.2 Erzeugende Funktion

Wir wollen nun die erzeugende Funktion für die Anzahl aller Wörter der Sprache eines DEA's herleiten. Dazu sind zunächst noch einige Vorbetrachtungen notwendig.

Definition 4.1.4 Sei L eine formale Sprache mit genau l_n Wörtern der Länge n . Dann ist

$$L(z) = \sum_{n \geq 0} l_n z^n$$

die **erzeugende Funktion** der Sprache L .

Definition 4.1.5 Ein n -Tupel (L_1, \dots, L_n) formaler Sprachen heißt **eindeutig**, falls sich jedes Wort $x \in L_1 \cdots L_n$ eindeutig in der Form

$$x = x_1 \cdots x_n$$

mit $x_i \in L_i, i = 1, \dots, n$ darstellen lässt.

Lemma 4.1.6 Es seien K und L formale Sprachen, sodass (K, L) eindeutig ist. Dann gilt:

$$(KL)(z) = K(z) \cdot L(z).$$

Beweis. Durch Anwenden der Definition der erzeugenden Funktion der Sprache KL erhalten wir

$$\begin{aligned} (KL)(z) &= \sum_{n \geq 0} \#\{x \in KL \mid |x| = n\} z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{k, l \geq 0 \\ k+l=n}} \#\{u \in K \mid |u| = k\} \#\{v \in L \mid |v| = l\} z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \#\{u \in K \mid |u| = k\} \#\{v \in L \mid |v| = n - k\} z^n \\ &= K(z)L(z). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Folgerung 4.1.7 Seien L_1, \dots, L_n formale Sprachen, sodass (L_1, \dots, L_n) eindeutig ist. Dann erhält man durch vollständige Induktion

$$(L_1 \cdots L_n)(z) = \prod_{i=1}^n L_i(z).$$

Lemma 4.1.8 Seien L_1, L_2, \dots paarweise disjunkte formale Sprachen. Dann gilt:

$$(L_1 \cup L_2 \cup \dots)(z) = L_1(z) + L_2(z) + \dots$$

Beweis. Wir wenden die Definition der erzeugenden Funktion auf die Sprache $\bigcup_{m \geq 1} L_m$ an und erhalten

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{m \geq 1} L_m\right)(z) &= \sum_{n \geq 0} \#\{x \in \bigcup_{m \geq 1} L_m \mid |x| = n\} z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 1} \#\{x \in L_m \mid |x| = n\} z^n \\ &= \sum_{m \geq 1} L_m(z). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Im Nachfolgenden zeigen wir einen wichtigen Satz, der uns eine Vorschrift zum Aufstellen der erzeugenden Funktion für die Anzahl aller Wörter der Sprache eines DEA's liefert.

Satz 4.1.9 [FS01] Es sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA und $A_q(z)$, $q \in Q$ sei die erzeugende Funktion für die Anzahl aller Wörter, die vom Zustand q in einen Endzustand führen.

Dann bestimmt sich die erzeugende Funktion $A_{q_0}(z)$ für die Anzahl aller vom DEA A akzeptierten Wörter aus dem Gleichungssystem

$$(E - M(z))A(z) = b. \quad (4.1)$$

Dabei ist E die Einheitsmatrix und

$$\begin{aligned} M(z) &:= (M_{qp}(z))_{q,p \in Q} := (\#\{a \in \Sigma \mid \delta(q, a) = p\} z)_{q,p \in Q}, \\ A(z) &:= (A_q(z))_{q \in Q}, \\ b &:= (b_q)_{q \in Q} := (I[q \in F])_{q \in Q}. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $L_q(A) := \{x \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(q, x) \cap F \neq \emptyset\}$ die Menge aller Wörter die vom Zustand $q \in Q$ in einen Endzustand führen. Die Sprache $L(A)$ des Automaten A ist somit $L_{q_0}(A)$. Es gilt für jedes $q \in Q$:

$$\begin{aligned} L_q(A) &= \bigcup_{a \in \Sigma} \{a\} L_{\delta(q,a)}(A), \text{ falls } q \notin F, \\ L_q(A) &= \bigcup_{a \in \Sigma} \{a\} L_{\delta(q,a)}(A) \cup \{\epsilon\}, \text{ falls } q \in F. \end{aligned}$$

Die Sprachen $\{a\}L_{\delta(q,a)}(A)$ mit $a \in \Sigma$ sind paarweise disjunkt, da die Anfangsbuchstaben der Wörter dieser Sprachen verschieden sind. Wir können somit Lemma 4.1.8 anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} A_q(z) &= \sum_{a \in \Sigma} zA_{\delta(q,a)}(z), \text{ falls } q \notin F, \\ A_q(z) &= \sum_{a \in \Sigma} zA_{\delta(q,a)}(z) + 1, \text{ falls } q \in F. \end{aligned}$$

Durch Umformung folgt

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \Sigma} zA_{\delta(q,a)}(z) &= \sum_{a \in \Sigma} \sum_{\substack{p \in Q \\ \delta(q,a)=p}} zA_p(z) \\ &= \sum_{p \in Q} \sum_{\substack{a \in \Sigma \\ \delta(q,a)=p}} zA_p(z) \\ &= \sum_{p \in Q} M_{qp}(z)A_p(z). \end{aligned}$$

Für alle $q \in Q$ ergibt sich

$$A_q(z) = \sum_{p \in Q} M_{qp}(z)A_p(z) + b_q.$$

Durch Verwendung der Matrixschreibweise erhalten wir das Ergebnis

$$A(z) = M(z)A(z) + b. \quad \blacksquare$$

Bemerkung 4.1.10 Eine Potenzreihe kann nur invertiert werden, wenn sein Absolutglied ungleich null ist (siehe [Tit00]). Da nur auf der Hauptdiagonale der Matrix $E - M(z)$ Polynome mit nichtverschwindenden Absolutgliedern stehen, ist das Gleichungssystem (4.1) stets lösbar.

4.1.3 Vermeidung von Kurzyklen

Wir wollen in diesem Abschnitt zwei deterministische Automaten angeben, die alle Irrfahrten im Z^2 akzeptieren, die keine Zyklen der Länge zwei und keine Zyklen der Länge zwei oder vier enthalten. Wir orientieren uns hier an der Darstellung von [Tit01a].

DEA zur Vermeidung von Kurzyklen der Länge zwei

Es sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA, der alle Irrfahrten im Z^2 akzeptiert, die keine Zyklen der Länge zwei enthalten, dass sind alle Irrfahrten w mit $w(i) \neq w(i+2)$, $i = 0, \dots, |w| - 2$.

Die Irrfahrt w soll im Ursprung des Z^2 starten und wird als ein Wort über dem Alphabet $\Sigma = \{r, l, o, u\}$ beschrieben. Dabei stehen die Abkürzungen r, l, o, u für die Bewegungsrichtung der Irrfahrt um eine Einheit nach rechts, links, oben und unten. Der Automat soll das Wort w genau dann akzeptieren, wenn w keine Unterwörter der Form rl, lr, ou und uo enthält, da diese Unterwörter genau alle Kreise der Länge zwei beschreiben.

Für diesen Automaten benötigen wir eine sechselementige Zustandsmenge

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}.$$

Die Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ lässt sich auch als Übergangstabelle, für diesen Automaten A in der Form

δ	r	l	o	u
q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1	q_1	q_5	q_3	q_4
q_2	q_5	q_2	q_3	q_4
q_3	q_1	q_2	q_3	q_5
q_4	q_1	q_2	q_5	q_4
q_5	q_5	q_5	q_5	q_5

angeben. Der Anfangszustand dieses Automaten ist der Zustand q_0 . Die Menge der Endzustände von A ist

$$F = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}.$$

Jeder DEA akzeptiert alle Wörter, bei denen der Automat sich danach in einem der Endzustände befindet. Das ist genau dann der Fall, wenn er sich nicht im Zustand q_5 befindet. In diesen Zustand gelangt der Automat aber nur, wenn w eines der verbotenen Unterwörter rl, lr, ou und uo enthält. Diese Wörter beschreiben genau die Kreise der Länge zwei, die der Automat nicht akzeptiert.

Die erzeugende Funktion $C_2^{(2)}(z)$ für die Anzahl aller Irrfahrten, die keine Kreise der Länge zwei enthalten, können wir durch Satz 4.1.9 bestimmen. In diesem Fall jedoch auch durch Überlegung, es gibt genau $4 \cdot 3^{N-1}$ Möglichkeiten für Irrfahrten der Länge $N \geq 1$. Damit erhalten wir die erzeugende Funktion

$$C_2^{(2)}(z) = 1 + 4 \sum_{N \geq 1} 3^{N-1} z^N = 1 + \frac{4z}{1-3z} = \frac{1+z}{1-3z}.$$

DEA zur Vermeidung von Kurzyklen der Länge zwei oder vier

Jetzt geben wir einen deterministischen Automaten $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ an, der alle Irrfahrten w akzeptiert, welche keine Kreise im Z^2 der Länge zwei oder vier enthalten.

Es sei $w = w_1 w_2 \dots w_n$ ein Wort, das die Irrfahrt wie folgt beschreibt:

Der erste Schritt w_1 wird über dem Alphabet $\{r, l, o, u\}$ und alle weiteren Schritte werden durch $\Sigma = \{g, r, l\}$ beschrieben, dabei bedeutet g, r und l , dass die Irrfahrt im Folgeschritt eine Einheit geradeaus (g), eine Einheit um 90° nach rechts (r) bzw. eine Einheit um 90° nach links (l) geht, in Bezug auf den vorherigen Schritt. Wir betrachten im Folgenden nur das Unterwort $a \in \Sigma^*$ von $w = w_1 a$, da Kreise der Länge zwei oder vier nur dann auftreten können, wenn das Wort a die Unterwörter rrr oder lll enthält.

Die Zustandsmenge des Automaten A sei

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$$

und die Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$

δ	g	l	r
q_0	q_0	q_1	q_2
q_1	q_0	q_3	q_2
q_2	q_0	q_1	q_4
q_3	q_0	q_5	q_2
q_4	q_0	q_1	q_5
q_5	q_5	q_5	q_5

Der Anfangszustand dieses Automaten ist wieder der Zustand q_0 . Die Menge F der Endzustände von A ist

$$F = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}.$$

Mit Hilfe von Satz 4.1.9 berechnen wir die erzeugende Funktion $C_2^{(4)}(z)$ für die Anzahl aller Irrfahrten, die keine Kreise der Länge zwei oder vier enthalten. Dazu stellen wir das Gleichungssystem

$$(E - M(z))A(z) = b$$

mit

$$M(z) = \begin{pmatrix} z & z & z & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & z & z & 0 & 0 \\ z & z & 0 & 0 & z & 0 \\ z & 0 & z & 0 & 0 & z \\ z & z & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3z \end{pmatrix}, \quad A(z) = \begin{pmatrix} A_{q_0}(z) \\ A_{q_1}(z) \\ A_{q_2}(z) \\ A_{q_3}(z) \\ A_{q_4}(z) \\ A_{q_5}(z) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

auf. Die gesuchte erzeugende Funktion $C_2^{(4)}(z)$ erhalten wir aus $A_{q_0}(z)$ durch Hinzufügen des Anfangsschrittes in eine der vier Richtungen und durch Addition von eins, dies entspricht der leeren Irrfahrt (Irrfahrt der Länge null), wir erhalten

$$\begin{aligned} C_2^{(4)}(z) &= 4zA_{q_0}(z) + 1 \\ &= \frac{1 + 2z + 2z^2 + 3z^3}{1 - 2z - 2z^2 - z^3} \\ &= 1 + 4z + 12z^2 + 36z^3 + 100z^4 + 284z^5 + 804z^6 + \dots \end{aligned}$$

4.2 Kellerautomat

4.2.1 Begriffe und Definitionen

Definition 4.2.1 [Sch01] Ein **Kellerautomat** (bzw: **Stackautomat**) ist ein 7-Tupel

$$A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F).$$

Dabei ist

1. Q eine endliche Menge (**Zustandsmenge**).
2. Σ ist eine endliche Menge (**Eingabealphabet**).
3. Γ ist eine endliche Menge (**Kelleralphabet**).
4. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$ ist eine Abbildung (**Übergangsfunktion**).
5. $q_0 \in Q$ ist ein Element von Q (**Anfangszustand**).
6. $Z_0 \in \Gamma$ ist ein Element von Γ (**Kellerstartsymbol**).
7. $F \subseteq Q$ ist eine endliche Menge (**Endzustandsmenge**).

Bemerkung 4.2.2 Wenn $(p, \gamma) \in \delta(q, a, z)$ gilt, bedeutet dies, dass wenn sich der Kellerautomat im Zustand $q \in Q$ befindet, das Eingabesymbol $a \in \Sigma$ liest und $z \in \Gamma$ das oberste Kellersymbol ist, er in den Zustand $p \in Q$ wechseln und das oberste Kellerzeichen durch $\gamma \in \Gamma^*$ ersetzen kann.

Definition 4.2.3 Unter einer **Konfiguration** eines Kellerautomaten $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ verstehen wir ein Tripel

$$(q, x, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*,$$

hierbei ist $q \in Q$ der aktuelle Zustand, $x \in \Sigma^*$ das noch nicht gelesene Eingabewort und $\gamma \in \Gamma^*$ der aktuelle Kellerzustand. Auf $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ definieren wir eine binäre Relation \mapsto , indem wir für alle $(q, x, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ und alle $(p, \beta) \in \delta(q, a, \alpha)$ festlegen:

$$(q, ax, \alpha\gamma) \mapsto (p, x, \beta\gamma).$$

Bemerkung 4.2.4 Die letzte Definition bedeutet, dass der Automat vom Zustand $q \in Q$ in den Zustand $p \in Q$ übergeht, indem er das Symbol $a \in \Sigma$ aus der Eingabe liest und $\alpha \in \Gamma$ im Keller (Stack) durch $\beta \in \Gamma^*$ ersetzt.

Definition 4.2.5 Für zwei Konfigurationen K und K' sei

$$K \mapsto^* K' :\Leftrightarrow K = K' \text{ oder } \exists K_0, \dots, K_n : K = K_0 \mapsto K_1 \mapsto \dots \mapsto K_n = K'.$$

Bemerkung 4.2.6 In der obigen Definition ist \mapsto^* die reflexive und transitive Hülle von \mapsto .

Definition 4.2.7 Die von einem Kellerautomaten $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ „**durch Endzustand**“ akzeptierte Sprache ist definiert durch

$$L(A) := \{x \in \Sigma^* \mid \exists q \in F, \exists \gamma \in \Gamma^* : (q_0, x, Z_0) \mapsto^* (q, \epsilon, \gamma)\}.$$

Die von A „**durch leeren Keller**“ akzeptierte Sprache ist definiert durch

$$L'(A) := \{x \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q : (q_0, x, Z_0) \mapsto^* (q, \epsilon, \epsilon)\}.$$

Eine Sprache heißt **kontextfrei**, wenn sie von einem Kellerautomaten akzeptiert wird (durch Endzustand oder durch leeren Keller (Stack)), d.h. $L \subseteq \Sigma^*$ ist kontextfrei genau dann, wenn es einen Kellerautomaten A gibt mit $L = L(A)$ oder $L = L'(A)$.

Definition 4.2.8 Der Kellerautomat $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ heißt **deterministisch**, falls

$$|\delta(q, a, \alpha) \cup \delta(q, \epsilon, \alpha)| \leq 1$$

für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $\alpha \in \Gamma$ gilt. Deterministische Kellerautomaten akzeptieren jedoch nur durch Endzustand und nicht per leeren Keller.

Wenn in einem Kellerautomat Übergänge $\delta(q, \epsilon, \alpha)$ existieren, so werden diese als ϵ -**Übergänge** bezeichnet.

Bemerkung 4.2.9 Man kann zeigen, dass die Sprachen, die von einem Kellerautomat durch Endzustand erkannt werden, genau die Sprachen sind, die von einem Kellerautomat durch leeren Keller erkannt werden. Interessierte Leser finden den Beweis in Hopcroft und Ullman [HU01].

4.2.2 Erzeugende Funktion

Wir wollen nun analog wie bei den deterministischen Automaten, eine Vorschrift zur Ableitung der erzeugenden Funktion für die Anzahl aller Wörter der Sprache eines Kellerautomaten herleiten. Dies gestaltet sich bei Kellerautomaten jedoch wesentlich schwieriger, als bei den DEA's. Wir werden uns hier bei der Aufstellung der erzeugenden Funktion auch nur auf deterministische Kellerautomaten ohne ϵ -Übergänge beschränken. ¹

¹Dem Autor ist keine allgemeine Methode zur Aufstellung der erzeugenden Funktion für die Sprache von Kellerautomaten bekannt.

Definition 4.2.10 [*] Es sei $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ ein deterministischer Kellerautomat ohne ϵ -Übergänge, dann sei $H_{(p,\beta)}^{(q,\alpha)}(z)$ die erzeugende Funktion für die Anzahl aller Wörter, die vom Zustand $p \in Q$ mit dem Kellerwort $\beta \in \Gamma^*$ in den Zustand $q \in Q$ mit dem Kellerzeichen $\alpha \in \Gamma$ übergehen.

Satz 4.2.11 [*] Es sei $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ ein deterministischer Kellerautomat ohne ϵ -Übergänge und $A_{(q,\alpha)}(z)$ sei die erzeugende Funktion für die Anzahl aller Wörter, die vom Zustand $q \in Q$ mit dem Kellerwort $\alpha \in \Gamma^*$ in einen Endzustand führen, weiterhin sei $A_\emptyset(z) := 0$.

Die erzeugende Funktion $A_{(q_0, Z_0)}(z)$ für die Anzahl der vom Kellerautomat A durch Endzustand akzeptierten Wörter bestimmt sich aus dem Gleichungssystem

$$A_{(q,\alpha)}(z) = \sum_{a \in \Sigma} z A_{\delta(q,a,\alpha)}(z) + I[q \in F], \quad \forall q \in Q, \alpha \in \Gamma. \quad (4.2)$$

Falls $\delta(q, a, \alpha) = (p, \beta)$ mit $|\beta| \neq 1$ existieren, so erhält man zusätzlich die Gleichungen

$$A_{\delta(q,a,\alpha)}(z) = A_{(p,\beta)}(z) = H_{(p,\beta)}^{(q,\alpha)}(z) \cdot A_{(q,\alpha)}(z). \quad (4.3)$$

Beweis. Es sei

$$L_{(q,\alpha)}(A) := \{x \in \Sigma^* \mid \exists p \in F, \exists \gamma \in \Gamma^* : (q, x, \alpha) \xrightarrow{*} (p, \epsilon, \gamma)\}.$$

die Menge aller Wörter, die vom Zustand $q \in Q$ mit dem Kellerwort $\alpha \in \Gamma$ in einen Endzustand führen. Die Sprache $L(A)$ des Automaten A ist damit $L_{(q_0, Z_0)}(A)$.

Es gilt für jedes $q \in Q$ und $\alpha \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} L_{(q,\alpha)}(A) &= \bigcup_{a \in \Sigma} \{a\} L_{\delta(q,a,\alpha)}(A), \quad \text{falls } q \notin F, \\ L_{(q,\alpha)}(A) &= \bigcup_{a \in \Sigma} \{a\} L_{\delta(q,a,\alpha)}(A) \cup \{\epsilon\}, \quad \text{falls } q \in F. \end{aligned}$$

Aufgrund der Tatsache, dass die Sprachen $\{a\} L_{\delta(q,a,\alpha)}(A)$ mit $a \in \Sigma$ paarweise disjunkt sind, können wir wieder Lemma 4.1.8 anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} A_{(q,\alpha)}(z) &= \sum_{a \in \Sigma} z A_{\delta(q,a,\alpha)}(z), \quad \text{falls } q \notin F, \\ A_{(q,\alpha)}(z) &= \sum_{a \in \Sigma} z A_{\delta(q,a,\alpha)}(z) + 1, \quad \text{falls } q \in F. \end{aligned}$$

Es sei $\delta(q, a, \alpha) = (p, \beta)$. Falls in den obigen Gleichungen alle β nur ein Zeichen besitzen, haben wir ein eindeutig lösbares Gleichungssystem (4.2) und können daraus die erzeugende Funktion $A_{(q_0, Z_0)}(z)$ für die Anzahl aller vom Kellerautomaten akzeptierten Wörter bestimmen.

Wenn $|\beta| \neq 1$ existieren, müssen wir für diese Unbekannten Variablen die erzeugenden Funktionen $A_{\delta(q,a,\alpha)}(z)$ aufstellen, um ein eindeutig lösbares Gleichungssystem zu erhalten. Da $H_{(p,\beta)}^{(q,\alpha)}(z)$ die erzeugende Funktion für die Anzahl aller Wörter, die vom Zustand p mit dem Kellerwort β in den Zustand q mit dem Kellerzeichen α übergeht, folgt

$$A_{\delta(q,a,\alpha)}(z) = A_{(p,\beta)}(z) = H_{(p,\beta)}^{(q,\alpha)}(z) \cdot A_{(q,\alpha)}(z). \quad \blacksquare$$

Beispiel 4.2.12 Es sei $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ ein deterministischer Kellerautomat mit:

$$\begin{aligned} Q &= \{q_0, q_1, q_2\}, \\ \Sigma &= \{a, b\}, \\ \Gamma &= \{a, b, Z_0\}, \\ F &= \{q_0\}. \end{aligned}$$

Die Übergangsfunktion δ sei durch

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, Z_0) &= (q_1, Z_0), & \delta(q_0, b, Z_0) &= (q_2, Z_0), \\ \delta(q_1, a, Z_0) &= (q_1, aZ_0), & \delta(q_1, b, Z_0) &= (q_0, Z_0), \\ \delta(q_1, a, a) &= (q_1, aa), & \delta(q_1, b, a) &= (q_1, \epsilon), \\ \delta(q_2, b, Z_0) &= (q_2, bZ_0), & \delta(q_2, a, Z_0) &= (q_0, Z_0), \\ \delta(q_2, b, b) &= (q_2, bb), & \delta(q_2, a, b) &= (q_2, \epsilon) \end{aligned}$$

gegeben. Die Sprache des Kellerautomaten A sind alle Wörter $w \in \Sigma^*$, die gleichhäufig den Buchstaben a und b enthalten.

Durch Anwendung von Satz 4.2.11 erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} A_{(q_0, Z_0)}(z) &= zA_{(q_1, Z_0)}(z) + zA_{(q_2, Z_0)}(z) + 1, \\ A_{(q_1, Z_0)}(z) &= zA_{(q_1, aZ_0)}(z) + zA_{(q_0, Z_0)}(z), \\ A_{(q_2, Z_0)}(z) &= zA_{(q_2, bZ_0)}(z) + zA_{(q_0, Z_0)}(z), \\ A_{(q_1, a)}(z) &= zA_{(q_1, aa)}(z) + zA_{(q_1, \epsilon)}(z), \\ A_{(q_2, b)}(z) &= zA_{(q_2, bb)}(z) + zA_{(q_2, \epsilon)}(z). \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich mit $f(z) = \frac{z^2}{1-f(z)}$

$$\begin{aligned} A_{(q_1, aZ_0)}(z) &= \frac{f(z)}{z} A_{(q_1, Z_0)}(z), & A_{(q_2, bZ_0)}(z) &= \frac{f(z)}{z} A_{(q_2, Z_0)}(z), \\ A_{(q_1, aa)}(z) &= \frac{f(z)}{z} A_{(q_1, a)}(z), & A_{(q_2, bb)}(z) &= \frac{f(z)}{z} A_{(q_2, b)}(z), \\ A_{(q_1, \epsilon)}(z) &= A_{(q_1, Z_0)}(z), & A_{(q_2, \epsilon)}(z) &= A_{(q_2, Z_0)}(z). \end{aligned}$$

Durch Lösen des Gleichungssystems erhalten wir die erzeugende Funktion ²

$$A_{(q_0, Z_0)}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4z^2}}$$

für den Kellerautomaten A .

Bemerkung 4.2.13

1. Die Bestimmung der erzeugenden Funktionen (4.3) kann sich bei umfangreichen Kellerautomaten schwierig gestalten.
2. Die erzeugende Funktion einer regulären Sprache ist immer rational, bei kontextfreien Sprachen ist dies im Allgemeinen nicht der Fall.
3. Es sei L eine Sprache und $L(z)$ die dazugehörige rationale erzeugende Funktion. Im Allgemeinen gilt nicht, dass es dann einen DEA A mit $L = L(A)$ gibt. Wenn dies der Fall wäre, gäbe es auch zu der Sprache

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

mit der rationalen erzeugenden Funktion

$$L(z) = \frac{z^2}{1-z^2}$$

einen DEA A mit $L(A) = L$. Da L aber nicht regulär ist (siehe [Sch01]), folgt, dass kein DEA A zu der Sprache L existiert.

4.2.3 Vermeidung von Kurzzyklen

In diesem Abschnitt wollen wir nun an zwei Beispielen zeigen, wie man einen Kellerautomaten konstruieren kann, der alle Irrfahrten, die keine Kurzzyklen der Länge zwei und keine Kurzzyklen der Länge zwei oder vier akzeptiert.

Kellerautomat zur Vermeidung von Kurzzyklen der Länge zwei

Es sei $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ ein Kellerautomat, der alle Irrfahrten im Z^2 akzeptiert, welche keine Zyklen der Länge zwei enthalten. Dieser Kellerautomat besitzt die Zustandsmenge

$$Q = \{q_0, q_1\}.$$

Das Eingabealphabet $\Sigma = \{r, l, o, u\}$ beschreibt die Irrfahrt durch die Anweisung rechts, links, oben und unten. Das Kelleralphabet sei $\Gamma = \{r, l, o, u, Z_o\}$ mit dem Kellerstartsymbol Z_0 . Die Übergangsfunktion δ lässt sich als Übergangstabelle für den Zustand q_0 in der Form

²Dieses Ergebnis kann auch mittels Reduktionstechnik gewonnen werden, siehe dazu [Tit01c].

δ		Σ			
		r	l	o	u
Γ	r	(q_0, r)	(q_1, l)	(q_0, o)	(q_0, u)
	l	(q_1, r)	(q_0, l)	(q_0, o)	(q_0, u)
	o	(q_0, r)	(q_0, l)	(q_0, o)	(q_1, u)
	u	(q_0, r)	(q_0, l)	(q_1, o)	(q_0, u)
	Z_0	(q_0, r)	(q_0, l)	(q_0, o)	(q_0, u)

angeben. Die Übergangsfunktion für den Zustand q_1 lautet $\delta(q_1, a, b) = (q_1, a)$ für $a \in \Sigma$ und $b \in \Gamma$. Der Anfangszustand dieses Automaten ist der Zustand q_0 . Die Menge F der Endzustände von A ist nur der Zustand q_0 . Dieser Kellerautomat akzeptiert alle Wörter „durch Endzustand“, die keinen Kreis der Länge zwei besitzen.

Kellerautomat zur Vermeidung von Kurzzyklen der Länge zwei oder vier

Der folgende Kellerautomat $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ akzeptiert alle Irrfahrten, die keine Zyklen der Länge zwei oder vier enthalten. Der Kellerautomat besitzt eine dreielementige Zustandsmenge

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}.$$

Es sei $w = w_1w_2 \dots w_n$ ein Wort, welches die Irrfahrt wie folgt beschreibt: Der erste Schritt w_1 wird über dem Alphabet $\{r, l, o, u\}$ und alle weiteren Schritte werden durch $\Sigma = \{g, r, l\}$ beschrieben, dabei bedeutet g, r und l , dass die Irrfahrt im Folgeschritt eine Einheit geradeaus (g), eine Einheit um 90° nach rechts (r) bzw. eine Einheit um 90° nach links (l) geht, in Bezug auf den vorherigen Schritt. Wir betrachten im Folgenden wieder nur das Unterwort $a \in \Sigma^*$ von $w = w_1a$, da Kreise der Länge zwei oder vier nur dann auftreten können, wenn das Wort a die Unterwörter rrr oder lll enthält. Das Kelleralphabet sei $\Gamma = \{r, l, g, Z_o\}$ mit dem Kellerstartsymbol Z_0 . Die Übergangstabelle für den Zustand q_0 hat das Aussehen

δ		Σ		
		r	l	g
Γ	r	(q_1, r)	(q_0, l)	(q_0, g)
	l	(q_0, r)	(q_1, l)	(q_0, g)
	g	(q_0, r)	(q_0, l)	(q_0, g)
	Z_0	(q_0, r)	(q_0, l)	(q_0, g)

und für q_1

		Σ		
		r	l	g
Γ	r	(q_2, r)	(q_0, l)	(q_0, g)
	l	(q_0, r)	(q_2, l)	(q_0, g)
	g	(q_0, r)	(q_0, l)	(q_0, g)

Die Übergangsfunktion für den Zustand q_2 lautet $\delta(q_2, a, b) = (q_2, a)$ für $a \in \Sigma$ und $b \in \Gamma$. Der Anfangszustand dieses Automaten ist der Zustand q_0 . Die Menge F der Endzustände von A sind die Zustände q_0 und q_1 . Dieser Kellerautomat akzeptiert alle Wörter „durch Endzustand“, die keinen Kreis der Länge zwei oder vier besitzen.

4.3 Sprachtyp der selbstvermeidenden Irrfahrten

Wir wollen nun in diesem Abschnitt die Sprache der selbstvermeidenden Irrfahrten charakterisieren.

Satz 4.3.1 [*] *Es sei $\Sigma = \{r, l, o, u\}$ ein Alphabet. Die Sprache*

$$L_{\text{SAW}} := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beschreibt eine selbstvermeidende Irrfahrt}\}$$

ist nicht regulär.

Beweis. Wir nehmen an, L_{SAW} ist regulär. Dann gäbe es einen DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L(A) = L_{\text{SAW}}$. Es seien $w_1 = r^m$ und $w_2 = r^n$ mit $m < n$ zwei verschiedene selbstvermeidende Irrfahrten, die nur Rechtsschritte enthalten. Weil es unendlich viele selbstvermeidende Irrfahrten gibt, die nur aus Rechtsschritten bestehen, und da der DEA nur endlich viele Zustände besitzt, existieren Indizes m und n , mit $m < n$ welche die Bedingung

$$\widehat{\delta}(q_0, r^m) = \widehat{\delta}(q_0, r^n)$$

erfüllen. Weiterhin sei $x := ul^{m+1}o$, dann ist $w_1x \in L_{\text{SAW}}$ und $w_2x \notin L_{\text{SAW}}$. Aus

$$\widehat{\delta}(q_0, w_1x) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q_0, w_1), x) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q_0, w_2), x) = \widehat{\delta}(q_0, w_2x)$$

folgt, dass bei Eingabe von w_1x und w_2x der Automat jeweils im gleichem Zustand ist. Da aber nach Voraussetzung $w_1x \in L_{\text{SAW}}$ und $w_2x \notin L_{\text{SAW}}$ ist, erhalten wir einen Widerspruch und somit ist L_{SAW} nicht regulär. ■

Bemerkung 4.3.2 Die Sprache

$$L_{\text{SAW}}^k = \{w \in \{r, l, o, u\}^* \mid w \text{ beschreibt eine Irrfahrt, die keine Kreise kleiner gleich } k \text{ enthält}\}$$

ist regulär für endliches k . Man kann dafür einen DEA konstruieren, der alle Wörter akzeptiert, die keine Kreise kleiner gleich k enthalten.

Praktisch wird der DEA so konstruiert, dass er alle Irrfahrten akzeptiert, die Kurzzyklen kleiner gleich k enthalten. Durch Komplementbildung erhält man dann alle Irrfahrten, die keine Kreise kleiner gleich k enthalten. Mit so einer Konstruktion lassen sich obere Schranken für die Bindungskonstante gewinnen [PT00].

Definition 4.3.3 Eine Sprache heißt **deterministisch kontextfrei**, falls sie von einem deterministischen Kellerautomaten erkannt wird.

Satz 4.3.4 [*] *Es sei $\Sigma = \{r, l, o, u\}$ ein Alphabet. Die Sprache*

$$L_{\text{SAW}} = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beschreibt eine selbstvermeidende Irrfahrt}\}$$

ist keine deterministisch kontextfreie Sprache.

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe einen deterministischen Kellerautomaten $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ mit $L(A) = L_{\text{SAW}}$. Es seien $w_1, w_2 \in \Sigma$ zwei unterschiedliche selbstvermeidende Irrfahrten, die nur Rechtsschritte enthalten. Dann gibt es $q_i, q_j \in F$ und $\alpha, \beta \in \Gamma^*$ mit

$$\begin{aligned} (q_0, w_1, Z_0) &\xrightarrow{*} (q_i, \epsilon, \alpha), \\ (q_0, w_2, Z_0) &\xrightarrow{*} (q_j, \epsilon, \beta). \end{aligned}$$

Es gibt unendlich viele $x \in \Sigma^*$ mit $w_1x \in L_{\text{SAW}}$ und $w_2x \notin L_{\text{SAW}}$, da man beispielweise in x beliebig vielen Schritten nach unten gehen kann, bevor man später wieder an einen Punkt kommt, den die Irrfahrt w_2x schon besucht hat, aber nicht w_1x . Weil es nur endlich viele Zustände gibt, wählen wir x so, dass die Bedingung

$$\begin{aligned} (q_i, x, \alpha) &\xrightarrow{*} (q_k, \epsilon, \alpha'), \\ (q_j, x, \beta) &\xrightarrow{*} (q_k, \epsilon, \beta') \end{aligned}$$

erfüllt ist, für $q_k \in Q$ und $\alpha', \beta' \in \Gamma^*$. Es folgt

$$\begin{aligned} (q_0, w_1x, Z_0) &\xrightarrow{*} (q_i, x, \alpha) \xrightarrow{*} (q_k, \epsilon, \alpha'), \\ (q_0, w_2x, Z_0) &\xrightarrow{*} (q_j, x, \beta) \xrightarrow{*} (q_k, \epsilon, \beta') \end{aligned}$$

und damit ist der deterministische Kellerautomat bei Eingabe von w_1x und w_2x im Zustand q_k . Da aber nach Voraussetzung $w_1x \in L_{\text{SAW}}$ und $w_2x \notin L_{\text{SAW}}$ gilt, erhalten wir einen Widerspruch. ■

Bemerkung 4.3.5 Aufgrund der Tatsache, dass die Sprache L_{SAW} keine deterministisch kontextfreie Sprache ist, folgt die Aussage von Satz 4.3.1 sofort aus dem letzten Satz.

Kapitel 5

Lace Expansion

Mit der Methode der Lace Expansion können wir eine Formel für die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten zwischen zwei Punkten $x, y \in Z^d$ aufstellen. Wir leiten im Kapitel 5.1 aus dem Prinzip der Inklusion-Exklusion eine solche Formel ab. Im Kapitel 5.2 stellen wir eine alternative Ableitungsmöglichkeit mittels Lace Expansion dar. Wir verwenden hierzu die Darstellung von Madras und Slade [MS96].

5.1 Inklusion-Exklusion

5.1.1 Allgemeines Prinzip der Inklusion-Exklusion

Es sei U eine Grund- bzw. Universalmenge, dann bezeichnen wir mit $\sigma : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathbb{R}^+$ ein endliches Maß. Im Weiteren sei \bar{A} das Komplement von A in U und $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = U$.

Der folgende Satz führt das Prinzip der Inklusion-Exklusion ein.

Satz 5.1.1 [Doh03] *Es sei σ ein Maß auf einer Grundmenge U und $\{A_v\}_{v \in V}$ eine Familie von σ -messbaren Mengen. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\sigma\left(\bigcup_{v \in V} A_v\right) &= \sum_{\substack{I \subseteq V \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|-1} \sigma\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \\ \sigma\left(\bigcap_{v \in V} \bar{A}_v\right) &= \sum_{I \subseteq V} (-1)^{|I|} \sigma\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).\end{aligned}$$

Bemerkung 5.1.2

1. Das Prinzip der Inklusion-Exklusion hat viele Anwendungen in der Kombinatorik, Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie.

2. Spezielle Maße sind das Wahrscheinlichkeitsmaß $\sigma(A) = P(A)$ oder das Zählmaß $\sigma(A) = |A|$.
3. Das Prinzip der Inklusion-Exklusion kann auch mit der Indikatorfunktion $\chi(A)$ statt $\sigma(A)$ formuliert werden. Für die Indikatorfunktion gilt $\chi(A)(a) = 1$ falls $a \in A$ und $\chi(A)(a) = 0$ falls $a \in U \setminus A$.

5.1.2 Anwendung der Inklusion-Exklusion

Im Folgenden ist Ω die Menge der adjazenten Punkte des Ursprungs 0 im Z^d (Nachbarnpunkte des Ursprungs) und $w = (w(0), w(1), \dots, w(N))$, $w(i) \in Z^d$ mit $w(i+1) - w(i) \in \Omega$ eine gewöhnliche Irrfahrt.

Definition 5.1.3 Es sei $\mathcal{S}_{N,d}(x, y)$ die Menge aller gewöhnlichen Irrfahrten und $\mathcal{C}_{N,d}(x, y)$ die Menge aller selbstvermeidenden Irrfahrten von x nach y mit N Schritten im Z^d . Falls kein bestimmtes d vorgegeben ist, schreiben wir zur Abkürzung auch $\mathcal{S}_N(x, y)$ für $\mathcal{S}_{N,d}(x, y)$ und $\mathcal{C}_N(x, y)$ für $\mathcal{C}_{N,d}(x, y)$.

Mit $c_{N,d}(x, y) := |\mathcal{C}_{N,d}(x, y)|$ bzw. $c_N(x, y) := |\mathcal{C}_N(x, y)|$ ist

$$G_z(x, y) := \sum_{N=0}^{\infty} c_N(x, y) z^N.$$

die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten im Z^d von x nach y .

Im Nachfolgenden sei $\delta_{x,y}$ die Kroneckerfunktion, die für $x = y$ den Wert 1 hat und sonst den Wert 0 besitzt.

Bemerkung 5.1.4 Für $x = 0$ und $y = x$ folgt aus Definition 5.1.3

$$G_z(0, x) = \delta_{0,x} + \sum_{N=1}^{\infty} c_N(0, x) z^N. \quad (5.1)$$

Satz 5.1.5 [MS96] Für $x \in Z^d$ und $N \geq 1$ gilt

$$c_N(0, x) = \sum_{y \in \Omega} \left(c_{N-1}(y, x) - \sum_{w^{(1)} \in \mathcal{C}_{N-1}(y, x)} I[0 \in w^{(1)}] \right). \quad (5.2)$$

Beweis. [*] Wir verwenden das Prinzip der Inklusion-Exklusion zur Herleitung von (5.2). Es sei U die Menge aller Irrfahrten der Länge N zwischen dem Ursprung 0 und $x \in Z^d$, die ab dem zweiten Schritt selbstvermeidend sind. In U gibt es somit Irrfahrten, die einmal zum Ursprung 0 zurückkehren und sonst keinen Punkt des Z^d mehrfach besuchen.

Wir definieren A_S , $2 \leq S \leq N$ als die Menge aller Irrfahrten der Länge N

zwischen 0 und x , die im Schritt S zum Ursprung zurückkehren und sonst keinen Punkt des Z^d mehrfach besuchen. Damit ist $\overline{A_S}$ die Menge aller Irrfahrten in U , die im Schritt S nicht zum Ursprung zurückkehren. Daraus folgt mit dem Zählmaß $\sigma(A_S) = |A_S|$

$$c_N(0, x) = \sigma \left(\bigcap_{S=2}^N \overline{A_S} \right) = |U| - \sum_{S=2}^N |A_S|.$$

Die Irrfahrten in der Menge A_S sind im Schritt S im Ursprung 0, damit können wir diese Irrfahrten in den Teil $w^{(2)}$ von y nach 0 und in den Teil $w^{(3)}$ von 0 nach x zerlegen und erhalten

$$c_N(0, x) = \sum_{y \in \Omega} \left(c_1(0, y) c_{N-1}(y, x) - \sum_{S=1}^{N-1} \sum_{\substack{w^{(2)} \in \mathcal{C}_S(y, 0) \\ w^{(3)} \in \mathcal{C}_{N-S-1}(0, x)}} I[w^{(2)} \cap w^{(3)} = \{0\}] \right). \quad (5.3)$$

Da $c_1(0, y) = 1$ für $y \in \Omega$ und durch Zusammenfassen von $w^{(2)}$ und $w^{(3)}$ zu $w^{(1)}$ im zweiten Term erhalten wir

$$c_N(0, x) = \sum_{y \in \Omega} \left(c_{N-1}(y, x) - \sum_{w^{(1)} \in \mathcal{C}_{N-1}(y, x)} I[0 \in w^{(1)}] \right). \quad \blacksquare \quad (5.4)$$

Bemerkung 5.1.6 Der erste Term von (5.2) zählt alle Irrfahrten der Länge N von 0 nach x , welche selbstvermeidend nach dem ersten Schritt sind. Der zweite Term subtrahiert die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten von y nach x , die zum Ursprung 0 zurückkehren.

Wir setzen nun (5.2) in (5.1) ein und erhalten

$$\begin{aligned} G_z(0, x) &= \delta_{0,x} + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{y \in \Omega} \left(c_{N-1}(y, x) - \sum_{w^{(1)} \in \mathcal{C}_{N-1}(y, x)} I[0 \in w^{(1)}] \right) z^N \\ &= \delta_{0,x} + \sum_{y \in \Omega} \sum_{N=1}^{\infty} c_{N-1}(y, x) z^N - \sum_{y \in \Omega} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{w^{(1)} \in \mathcal{C}_{N-1}(y, x)} I[0 \in w^{(1)}] z^N \\ &= \delta_{0,x} + z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x) - \sum_{y \in \Omega} \sum_{N=0}^{\infty} z^{N+1} \sum_{w^{(1)} \in \mathcal{C}_N(y, x)} I[0 \in w^{(1)}]. \quad (5.5) \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen von (5.3) und (5.4) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{w^{(1)} \in \mathcal{C}_N(y,x)} I[0 \in w^{(1)}] &= \sum_{S=1}^N \sum_{\substack{w^{(2)} \in \mathcal{C}_S(y,0) \\ w^{(3)} \in \mathcal{C}_{N-S}(0,x)}} I[w^{(2)} \cap w^{(3)} = \{0\}] \\ &= \sum_{S=1}^N \left[c_S(y,0)c_{N-S}(0,x) - \sum_{\substack{w^{(2)} \in \mathcal{C}_S(y,0) \\ w^{(3)} \in \mathcal{C}_{N-S}(0,x)}} I[w^{(2)} \cap w^{(3)} \neq \{0\}] \right]. \end{aligned}$$

Es sei U_S die Menge aller selbstvermeidenden Kreise der Länge S , die zum Startpunkt 0 zurückkehren und $u_s := |U_S|$. Damit können wir den dritten Term von (5.5) schreiben als

$$\begin{aligned} &\sum_{y \in \Omega} \sum_{N=0}^{\infty} z^{N+1} \sum_{w^{(1)} \in \mathcal{C}_N(y,x)} I[0 \in w^{(1)}] \\ &= \sum_{S=2}^{\infty} z^S u_S G_z(0,x) - \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{S=2}^{\infty} \sum_{\substack{w^{(2)} \in U_S \\ w^{(3)} \in \mathcal{C}_N(0,x)}} z^{S+N} I[w^{(2)} \cap w^{(3)} \neq \{0\}]. \end{aligned}$$

Das Prinzip der Inklusion-Exklusion kann nun weiter auf den letzten Term der rechten Seite angewandt werden.

Beispiel 5.1.7 Wir berechnen für $x = (1, 1) \in Z^2$ die ersten Werte der Folge $\{c_{N,2}(0, x)\}_{N \geq 1}$ nach Formel (5.2). Für die Menge Ω der Nachbarnpunkte des Ursprungs $0 = (0, 0)$ erhalten wir

$$\Omega = \{(0, 1), (1, 0), (-1, 0), (0, -1)\}.$$

Für $N = 1$ folgt $c_{1,2}(0, x) = 0$ und für $N = 2$ erhält man

$$\begin{aligned} c_{2,2}(0, x) &= \sum_{y \in \Omega} \left(c_{1,2}(y, x) - \sum_{w^{(1)} \in \mathcal{C}_{1,2}(y,x)} I[0 \in w^{(1)}] \right) \\ &= c_{1,2}((1, 0), (1, 1)) + c_{1,2}((0, 1), (1, 1)) = 2. \end{aligned}$$

Für $N = 3$ gibt es keine selbstvermeidende Irrfahrt zum Punkt $x = (1, 1)$, also

ist $c_{3,2}(0, x) = 0$. Für $N = 4$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
c_{4,2}(0, x) &= c_{3,2}((1, 0), (1, 1)) - \sum_{w^{(1)} \in \mathcal{C}_{3,2}((1,0),(1,1))} I[0 \in w^{(1)}] + \\
& c_{3,2}((0, 1), (1, 1)) - \sum_{w^{(1)} \in \mathcal{C}_{3,2}((0,1),(1,1))} I[0 \in w^{(1)}] + \\
& c_{3,2}((-1, 0), (1, 1)) - \sum_{w^{(1)} \in \mathcal{C}_{3,2}((-1,0),(1,1))} I[0 \in w^{(1)}] + \\
& c_{3,2}((0, -1), (1, 1)) - \sum_{w^{(1)} \in \mathcal{C}_{3,2}((0,-1),(1,1))} I[0 \in w^{(1)}] \\
&= 4 \cdot (2 - 1) = 4.
\end{aligned}$$

Hierbei ist beispielsweise die Menge der selbstvermeidenden Irrfahrten von $(1, 0)$ nach $(1, 1)$ der Länge 3

$$\mathcal{C}_{3,2}((1, 0), (1, 1)) = \{((1, 0), (0, 0), (0, 1), (1, 1)), ((1, 0), (2, 0), (2, 1), (1, 1))\}.$$

Die erste selbstvermeidende Irrfahrt in dieser Menge kehrt zum Ursprung zurück und wird deshalb in der obigen Summe abgezogen.

5.2 Algebraische Ableitung

5.2.1 Einige wichtige Definitionen

Definition 5.2.1 Es sei $w = (w(0), \dots, w(N))$ eine Irrfahrt und $s, t \in \llbracket 0, N \rrbracket$, dann sei

$$U_{st}(w) := \begin{cases} -1, & \text{falls } w(s) = w(t) \\ 0, & \text{falls } w(s) \neq w(t). \end{cases}$$

Satz 5.2.2 Für $x \in Z^d$ gilt:

$$G_z(0, x) = \sum_{w: 0 \rightarrow x} z^{|w|} \prod_{0 \leq s < t \leq |w|} (1 + U_{st}(w)).$$

Beweis. Wir summieren hier über alle Irrfahrten (nicht unbedingt selbstvermeidend) von 0 nach x . Das Produkt ist genau dann eins, wenn die Irrfahrt w selbstvermeidend ist, ansonsten ist es null. ■

Definition 5.2.3 Eine Irrfahrt w mit **Gedächtnislänge** $\tau \in \mathbb{N}$ ist eine Irrfahrt, die im Ursprung des Z^d beginnt und welche die Bedingung $w(i) \neq w(j)$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $0 < |i - j| \leq \tau$ erfüllt.

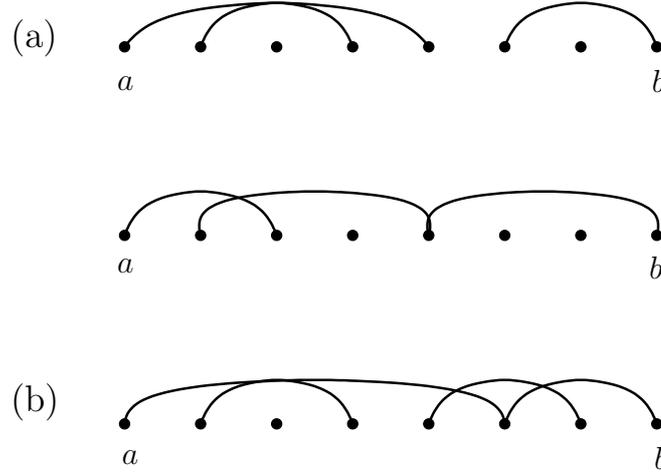


Abbildung 5.1: nicht stark zusammenhängende und stark zusammenhängende G-Graphen

Bemerkung 5.2.4 Die erzeugende Funktion $G_z(0, x; \tau)$ für die Anzahl der Irrfahrten von 0 nach $x \in \mathbb{Z}^d$ mit Gedächtnislänge τ lautet

$$G_z(0, x; \tau) := \sum_{w: 0 \rightarrow x} z^{|w|} \prod_{\substack{0 \leq s < t \leq |w| \\ t - s \leq \tau}} (1 + U_{st}(w)). \quad (5.6)$$

Für $\tau = 0$ erhält man die erzeugende Funktion für die Anzahl aller gewöhnlichen Irrfahrten von 0 nach x im \mathbb{Z}^d und für $\tau = \infty$ die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten von 0 nach x im \mathbb{Z}^d .

Definition 5.2.5 [MS96] Gegeben seien zwei natürliche Zahlen a, b und die Menge $I_{ab} := \llbracket a, b \rrbracket$, deren Elemente man als **Knoten** bezeichnet. Ein Paar $\{s, t\}$ (kurz: st), $s, t \in I_{ab}$, $s < t$ heißt **Kante**. Die **Länge** einer Kante st ist $t - s$. Eine Menge von Kanten bezeichnet man als **G-Graph**. Ein G-Graph X heißt **stark zusammenhängend**, wenn a und b Endpunkte von Kanten in X sind und es für alle $c \in (a, b)$ Elemente $s, t \in I_{ab}$ gibt, mit $s < c < t$ und $st \in X$.

In Abbildung 5.1(a) sind zwei nicht stark zusammenhängende G-Graphen und in (b) ein stark zusammenhängender G-Graph abgebildet.

Im Folgenden definieren wir verschiedene Mengen von G-Graphen, die im weiteren Verlauf noch eine wichtige Rolle spielen werden.

Definition 5.2.6 [MS96] Es sei $a, b, \tau \in \mathbb{N}$, $0 \leq \tau \leq b - a$ und

$$V_\tau[a, b] := \{st \mid a \leq s < t \leq b, t - s \leq \tau\}$$

die Menge aller Kanten zwischen a und b der Länge τ oder kleiner und $V[a, b] := V_{b-a}[a, b]$. Die Menge aller G-Graphen mit Kanten aus $V_\tau[a, b]$ sei

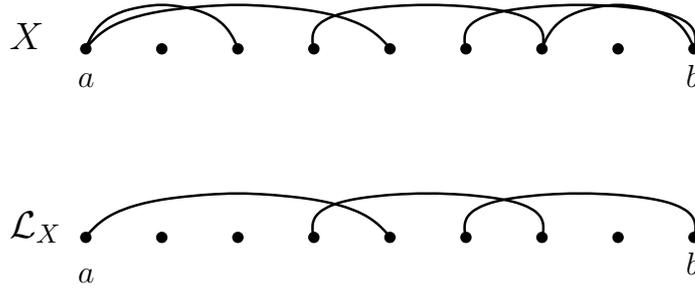


Abbildung 5.2: G-Graph X und Minimal Lace \mathcal{L}_X

$\mathcal{B}_\tau[a, b]$ (einschließlich des G-Graphen mit der leeren Kantenmenge). Weiterhin sei $\mathcal{G}_\tau[a, b]$ die Menge aller stark zusammenhängenden G-Graphen sowie $\mathcal{D}_\tau[a, b]$ die Menge aller nicht stark zusammenhängenden G-Graphen von $\mathcal{B}_\tau[a, b]$.

Bemerkung 5.2.7 Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\tau[a, b] &= \mathcal{P}(V_\tau[a, b]), \\ \mathcal{B}_\tau[a, b] &= \mathcal{G}_\tau[a, b] \cup \mathcal{D}_\tau[a, b]. \end{aligned}$$

Definition 5.2.8 Ein **Lace** ist ein stark zusammenhängender G-Graph, bei dem durch Entfernen einer Kante der entstehende G-Graph nicht mehr stark zusammenhängend ist. Die Menge aller Laces mit Kanten aus $V_\tau[a, b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_\tau[a, b]$, und die Menge aller Laces, welche aus genau n Kanten bestehen, sei $\mathcal{L}_{\tau,n}[a, b]$.

Definition 5.2.9 Es sei $X \subseteq V_\tau[a, b]$ ein G-Graph, dann sei $s_1 := a$ und $t_1 := \max\{t \mid at \in X\}$ und weiter

$$\begin{aligned} t_i &:= \max\{t \mid st \in X, s < t_{i-1}\}, \\ s_i &:= \min\{s \mid st_i \in X\}, \quad i \geq 2. \end{aligned}$$

Die Rekursion wird solange fortgeführt, bis entweder $t_k = b$ oder der Knoten c eines stark zusammenhängenden G-Graphen $\{a, a + 1, \dots, c - 1, c\} \subset X$ erreicht ist, wobei $\{a, a + 1, \dots, c, c + 1\}$ nicht stark zusammenhängend ist. Die Rekursion wird dann am Beginn des nächst größeren Knotens $c + 1$ fortgesetzt, jetzt mit $c + 1$ an Stelle von a . Der **Minimal G-Graph** \mathcal{L}_X zu X ist dann definiert durch die Menge der Kanten $\{s_1t_1, s_2t_2, \dots, s_kt_k\}$. Wenn \mathcal{L}_X stark zusammenhängend ist, so bezeichnet man \mathcal{L}_X auch als **Minimal Lace**.

Die Abbildung 5.2 zeigt einen G-Graphen X und den dazugehörigen Minimal Lace \mathcal{L}_X .

Bemerkung 5.2.10

1. Wenn der G-Graph X stark zusammenhängend ist, so ist auch \mathcal{L}_X stark zusammenhängend. Bei Entfernung einer Kante von \mathcal{L}_X würde der entstehende G-Graph nicht mehr stark zusammenhängend sein.
2. Es gilt

$$\mathcal{L}_\tau[a, b] \subseteq \mathcal{G}_\tau[a, b] \subseteq \mathcal{B}_\tau[a, b]$$

und

$$\mathcal{L}_\tau[a, b] = \{\mathcal{L}_X \mid X \in \mathcal{G}_\tau[a, b]\}.$$

Definition 5.2.11 Sei X ein G-Graph und $\mathcal{C}_\tau(X)$ sei die Menge aller Kanten $st \in V_\tau[a, b] \setminus X$ mit $\mathcal{L}_{X \cup \{st\}} = X$. Die Kanten in $\mathcal{C}_\tau(X)$ heißen **kompatibel** mit X .

Definition 5.2.12 Es sei w eine Irrfahrt und $a, b, \tau \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq \tau \leq b - a$. Dann sei

$$K_\tau[a, b](w) := \begin{cases} \prod_{st \in V_\tau[a, b]} (1 + U_{st}(w)), & a < b \\ 1, & a = b \\ 0, & a > b \end{cases} \quad (5.7)$$

und $\prod_{st \in \emptyset} U_{st}(w) := 1$.

Lemma 5.2.13 Für $a < b$ gilt

$$K_\tau[a, b](w) = \sum_{X \in \mathcal{B}_\tau[a, b]} \prod_{st \in X} U_{st}(w). \quad (5.8)$$

Beweis. Diese Formel erhalten wir durch Ausmultiplizieren von (5.7). ■

Auf analoger Weise, wie bei $K_\tau[a, b](w)$ in Folgerung 5.2.13, definieren wir eine Größe, in der die Summe nur über alle stark zusammenhängenden G-Graphen läuft.

Definition 5.2.14 Es sei w eine Irrfahrt und $a, b, \tau \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq \tau \leq b - a$. Dann sei

$$J_\tau[a, b](w) := \begin{cases} \sum_{X \in \mathcal{G}_\tau[a, b]} \prod_{st \in X} U_{st}(w), & a < b \\ 1, & a = b \\ 0, & a > b. \end{cases} \quad (5.9)$$

Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir für $U_{st}(w)$, $K_\tau[a, b](w)$ und $J_\tau[a, b](w)$ auch U_{st} , $K_\tau[a, b]$ und $J_\tau[a, b]$.

5.2.2 Abstract Lace Expansion

Im Nachfolgenden sei $\mathcal{P}^*(V)$ die Menge aller nichtleeren Teilmengen von V .

Definition 5.2.15 [Zei97] Sei V eine endliche Menge. Eine **Lace Abbildung** auf V ist eine Abbildung $l : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$, sodass für alle Teilmengen X und Y von V gilt:

1. $l(X) \subseteq X$,
2. $l(X) \subseteq Y \subseteq X \Rightarrow l(X) = l(Y)$,
3. $l(X) = l(Y) \Rightarrow l(X \cup Y) = l(X)$.

Falls l eine Lace Abbildung auf V ist, dann heißt eine Teilmenge X von V **l-Lace**, wenn $l(X) = X$ gilt.

Satz 5.2.16 [Zei97] Für jeden G -Graphen $X \subseteq V_\tau[a, b]$ sei

$$l(X) := \mathcal{L}_X.$$

Dann ist l eine Lace Abbildung auf $V_\tau[a, b]$ und \mathcal{L}_X ein l -Lace.

Beweis. Wir zeigen, dass l die Eigenschaften 1 bis 3 erfüllt. Eigenschaft 1 ist erfüllt, $l(X) \subseteq X$. 2. Wenn $l(X) \subseteq X' \subseteq X$, $X' \in V_\tau[a, b]$, dann ist aufgrund der Definition des Minimal G -Graphen $\mathcal{L}_X: \mathcal{L}_X = \mathcal{L}'_{X'}$. 3. Aus $l(X) = l(X')$ folgt, $l(X \cup X') = l(X) \cup l(X') = l(X)$. ■

Weitere Beispiele für Lace Abbildungen findet man in [Zei97]. Wir zeigen im Folgenden Zeilberger's „Abstract Lace Expansion“, welche eine Verbesserung der Inklusion-Exklusion mit Hilfe von Lace Abbildungen darstellt. Verbesserung heißt in diesem Falle, dass hier über weniger Terme summiert werden muss. Weiterführende Informationen zu Lace Abbildungen und zu verbesserten Inklusion-Exklusions Relationen, wie Abstrakten Tuben, findet man in Dohmen [Doh03].

Satz 5.2.17 [Zei97] Sei $\{A_v\}_{v \in V}$ eine Familie von Mengen und sei l eine Lace Abbildung auf V . Dann gilt:

$$\chi \left(\bigcup_{v \in V} A_v \right) = \sum_{\substack{I \in \mathcal{P}^*(V) \\ I \text{ ist ein } l\text{-Lace}}} (-1)^{|I|-1} \chi \left(\bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{j \in C_l(I)} \overline{A_j} \right), \quad (5.10)$$

$$\chi \left(\bigcap_{v \in V} \overline{A_v} \right) = \sum_{\substack{I \in \mathcal{P}(V) \\ I \text{ ist ein } l\text{-Lace}}} (-1)^{|I|} \chi \left(\bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{j \in C_l(I)} \overline{A_j} \right). \quad (5.11)$$

Hierbei ist

$$C_l(I) := \{v \in V \setminus I \mid l(I \cup \{v\}) = I\}.$$

Beweis. Wir wenden das Prinzip der Inklusion-Exklusion an und erhalten

$$\begin{aligned}
\chi\left(\bigcup_{v \in V} A_v\right) &= \sum_{I \in \mathcal{P}^*(V)} (-1)^{|I|-1} \chi\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \\
&= \sum_{\substack{I \in \mathcal{P}^*(V) \\ I \text{ ist ein l-Lace}}} \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}^*(V) \\ l(J)=I}} (-1)^{|J|-1} \chi\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \\
&= \sum_{\substack{I \in \mathcal{P}^*(V) \\ I \text{ ist ein l-Lace}}} \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}^*(V) \\ l(J)=I}} (-1)^{|I|+|J \setminus I|-1} \chi\left(\bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{j \in J \setminus I} A_j\right) \\
&= \sum_{\substack{I \in \mathcal{P}^*(V) \\ I \text{ ist ein l-Lace}}} (-1)^{|I|-1} \chi\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}^*(V) \\ l(J)=I}} (-1)^{|J \setminus I|} \chi\left(\bigcap_{j \in J \setminus I} A_j\right) \\
&= \sum_{\substack{I \in \mathcal{P}^*(V) \\ I \text{ ist ein l-Lace}}} (-1)^{|I|-1} \chi\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \sum_{\substack{K \subseteq V \setminus I \\ l(I \cup K)=I}} (-1)^{|K|} \chi\left(\bigcap_{k \in K} A_k\right) \\
&= \sum_{\substack{I \in \mathcal{P}^*(V) \\ I \text{ ist ein l-Lace}}} (-1)^{|I|-1} \chi\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \sum_{K \subseteq \mathcal{C}_l(I)} (-1)^{|K|} \chi\left(\bigcap_{k \in K} A_k\right)
\end{aligned}$$

Wenden wir auf den letzten Teil das Prinzip der Inklusion-Exklusion an, so erhalten wir (5.10). Die Formel (5.11) folgt durch Komplementbildung. ■

Lemma 5.2.18 [*] *Es sei $\{A_{st}\}_{st \in V_\tau[a,b]} := \{\{w \in \mathcal{S}_N(0, x) \mid w(s) = w(t)\}\}_{st \in V_\tau[a,b]}$, $a < b \leq N$ eine Familie von Mengen. Dann gilt*

$$K_\tau[a, b] = \chi\left(\bigcap_{st \in V_\tau[a,b]} \overline{A_{st}}\right).$$

Beweis. Aufgrund der Definition von A_{st} ist $\overline{A_{st}} = \{w \in \mathcal{S}_N(0, x) \mid w(s) \neq w(t)\}$ mit $st \in V_\tau[a, b]$ und $a < b \leq N$. Wir erhalten mit $w \in \mathcal{S}_N(0, x)$

$$\chi\left(\bigcap_{st \in V_\tau[a,b]} \overline{A_{st}}\right)(w) = \prod_{st \in V_\tau[a,b]} (1 + U_{st}(w)) = K_\tau[a, b](w). \quad \blacksquare$$

Satz 5.2.19 [MS96] *Für $a < b$ gilt:*

$$J_\tau[a, b] = \sum_{I \in \mathcal{L}_\tau[a,b]} \prod_{st \in I} U_{st} \prod_{s't' \in \mathcal{C}_\tau(I)} (1 + U_{s't'}).$$

Beweis. [*] Es sei $N \geq b$, wir wenden die Abstract Lace Expansion auf die Mengenfamilie

$$A_{st} = \{w \in \mathcal{S}_N(0, x) \mid w(s) = w(t)\}, \quad st \in V_\tau[a, b]$$

und der Lace Abbildung $l(X) = \mathcal{L}_X$, $X \subseteq V_\tau[a, b]$ an und erhalten mit Lemma 5.2.18 und $\mathcal{P}(V_\tau[a, b]) = \mathcal{B}_\tau[a, b]$ die Identität

$$K_\tau[a, b] = \sum_{\substack{I \in \mathcal{B}_\tau[a, b] \\ \mathcal{L}_I = I}} (-1)^{|I|} \chi \left(\bigcap_{st \in I} A_{st} \right) \left(\bigcap_{s't' \in C_l(I)} \overline{A_{s't'}} \right) \quad (5.12)$$

wobei

$$C_l(I) = \{st \in V_\tau[a, b] \setminus I \mid \mathcal{L}_{I \cup \{st\}} = I\} = C_\tau(I).$$

Durch Einsetzung der Indikatorfunktionen

$$\begin{aligned} \chi \left(\bigcap_{st \in I} A_{st} \right) &= (-1)^{|I|} \prod_{st \in I} U_{st}, \\ \chi \left(\bigcap_{s't' \in C_\tau(I)} \overline{A_{s't'}} \right) &= \prod_{s't' \in C_\tau(I)} (1 + U_{s't'}) \end{aligned}$$

in (5.12) und wegen $\mathcal{G}_\tau[a, b] \cup \mathcal{D}_\tau[a, b] = \mathcal{B}_\tau[a, b]$ folgt

$$K_\tau[a, b] = \sum_{\substack{I \in \mathcal{G}_\tau[a, b] \\ \mathcal{L}_I = I}} \prod_{st \in I} U_{st} \prod_{s't' \in C_\tau(I)} (1 + U_{s't'}) + \sum_{\substack{L \in \mathcal{D}_\tau[a, b] \\ \mathcal{L}_L = L}} \prod_{st \in L} U_{st} \prod_{s't' \in C_\tau(L)} (1 + U_{s't'}).$$

Den zweiten Summanden vereinfachen wir zu

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{L \in \mathcal{D}_\tau[a, b] \\ \mathcal{L}_L = L}} \prod_{st \in L} U_{st} \prod_{s't' \in C_\tau(L)} (1 + U_{s't'}) &= \sum_{\substack{L \in \mathcal{D}_\tau[a, b] \\ \mathcal{L}_L = L}} \prod_{st \in L} U_{st} \sum_{X: \mathcal{L}_X = L} \prod_{s't' \in X \setminus L} U_{s't'} \\ &= \sum_{\substack{L \in \mathcal{D}_\tau[a, b] \\ \mathcal{L}_L = L}} \sum_{X: \mathcal{L}_X = L} \prod_{st \in L} U_{st} \prod_{s't' \in X \setminus L} U_{s't'} \\ &= \sum_{X \in \mathcal{D}_\tau[a, b]} \prod_{st \in X} U_{st}. \end{aligned}$$

Wegen $K_\tau[a, b] = J_\tau[a, b] + \sum_{X \in \mathcal{D}_\tau[a, b]} \prod_{st \in X} U_{st}$ folgt die Behauptung des Satzes. ■

Definition 5.2.20 Für $a < b$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$J_{\tau, n}[a, b] := \sum_{L \in \mathcal{L}_{\tau, n}[a, b]} \prod_{st \in L} U_{st} \prod_{s't' \in C_\tau(L)} (1 + U_{s't'}). \quad (5.13)$$

Lemma 5.2.21 *Es gilt:*

$$J_\tau[a, b] = \sum_{n=1}^{\infty} J_{\tau, n}[a, b]$$

und $J_{\tau, n}[a, b] = 0$, $\forall n > b - a$.

Beweis. Nach Definition besitzt die Menge $\mathcal{L}_{\tau, n}[a, b]$ genau die Laces mit n Kanten aus $V_\tau[a, b]$. Da es keine Laces gibt, die in $\llbracket a, b \rrbracket$ mehr als $b - a$ Kanten besitzen, ist $J_{\tau, n}[a, b] = 0$ für alle $n > b - a$. ■

5.2.3 Ableitung einer Formel für $G_z(0, x; \tau)$

Lemma 5.2.22 [MS96] *Für $a \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$J_\tau[a, a + 1] = 0.$$

Beweis. In der Menge $\{a, a + 1\}$ gibt es genau einen Lace, nämlich $\mathcal{L}_\tau[a, a + 1] = \{a, a + 1\}$. Weiterhin ist $U_{a, a+1}(w) = 0$ für alle Irrfahrten w , weil eine Irrfahrt nach zwei hintereinanderliegenden Zeitpunkten nicht an ein und demselben Ort sein kann. Damit folgt $J_\tau[a, a + 1] = 0$. ■

Satz 5.2.23 [MS96] *Für alle $a < b$ gilt:*

$$K_\tau[a, b] = K_\tau[a + 1, b] + \sum_{j=a+2}^b J_\tau[a, j] K_\tau[j, b].$$

Beweis. Der Term $K_\tau[a + 1, b]$ berücksichtigt nur die G-Graphen X , für die a nicht in einer Kante von X enthalten ist. Der andere Teil ergibt sich, indem wir alle stark zusammenhängenden G-Graphen die eine Kante besitzen, die a enthält, hinzunehmen. Dies erfolgt durch den Term

$$\sum_{X \in \mathcal{G}_\tau[a, j]} \prod_{st \in X} U_{st}, \quad a + 2 \leq j \leq b.$$

Die Summierung beginnt erst ab $j > a + 2$, da nach Lemma 5.2.22 $U_{a, a+1}(w) = 0$ ist. Wir erhalten somit

$$K_\tau[a, b] = K_\tau[a + 1, b] + \sum_{j=a+2}^b \sum_{X \in \mathcal{G}_\tau[a, j]} \prod_{st \in X} U_{st} K_\tau[j, b].$$

Der Term $K_\tau[j, b]$ berücksichtigt alle G-Graphen, die im verbleibenden Intervall $\llbracket j, b \rrbracket$ liegen. Durch Einsetzen der Definition für $J_\tau[a, j]$ erhalten wir das Ergebnis. ■

Definition 5.2.24 Es sei

$$\Pi_z^{(n)}(0, x; \tau) := (-1)^n \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow x \\ |w| \geq 1}} z^{|w|} J_{\tau, n}[0, |w|]$$

und

$$\begin{aligned} \Pi_z(0, x; \tau) &:= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Pi_z^{(n)}(0, x; \tau) \\ &= \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow x \\ |w| \geq 1}} z^{|w|} J_{\tau}[0, |w|]. \end{aligned}$$

Zur Wiederholung, es sei Ω die Menge der adjazenten Punkte des Ursprungs 0 des Z^d .

Satz 5.2.25 [MS96] Für $x \in Z^d$ und $\tau \in \mathbb{N}$ gilt

$$G_z(0, x; \tau) = \delta_{0,x} + z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; \tau) + \sum_{v \in Z^d} \Pi_z(0, v; \tau) G_z(v, x; \tau).$$

Beweis. Durch Anwendung der Definition für $K_{\tau}[a, b]$ in (5.6) erhalten wir

$$G_z(0, x; \tau) = \delta_{0,x} + \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow x \\ |w| \geq 1}} z^{|w|} K_{\tau}[0, |w|].$$

Durch Verwendung von Satz 5.2.23 folgt:

$$G_z(0, x; \tau) = \delta_{0,x} + \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow x \\ |w| \geq 1}} z^{|w|} K_{\tau}[1, |w|] + \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow x \\ |w| \geq 1}} z^{|w|} \sum_{j=2}^{|w|} J_{\tau}[0, j] K_{\tau}[j, |w|].$$

Der Faktor $K_{\tau}[1, |w|]$ ist dann von null verschieden, wenn die Irrfahrt selbstvermeidend (mit Gedächtnislänge τ) nach dem ersten Schritt ist. Durch Summierung über alle $y \in \Omega$ im ersten Schritt ergibt

$$\begin{aligned} G_z(0, x; \tau) &= \delta_{0,x} + z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; \tau) + \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow x \\ |w| \geq 1}} z^{|w|} \sum_{j=2}^{|w|} J_{\tau}[0, j] K_{\tau}[j, |w|] \\ &= \delta_{0,x} + z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; \tau) + \sum_{N=1}^{\infty} z^N \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow x \\ |w|=N}} \sum_{j=2}^{|w|} J_{\tau}[0, j] K_{\tau}[j, N]. \end{aligned}$$

Durch Vertauschen der Summationsreihenfolge folgt

$$\begin{aligned}
G_z(0, x; \tau) &= \delta_{0,x} + z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; \tau) + \sum_{j=2}^{\infty} z^j \sum_{N=j}^{\infty} z^{N-j} \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow x \\ |w|=N}} J_{\tau}[0, j] K_{\tau}[j, N] \\
&= \delta_{0,x} + z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; \tau) + \sum_{j=2}^{\infty} z^j J_{\tau}[0, j] \sum_{N=j}^{\infty} z^{N-j} \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow x \\ |w|=N}} K_{\tau}[j, N] \\
&= \delta_{0,x} + z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; \tau) + \sum_{j=2}^{\infty} z^j J_{\tau}[0, j] \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow x \\ |w|=j+N}} K_{\tau}[j, j+N] \\
&= \delta_{0,x} + z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; \tau) + \sum_{j=2}^{\infty} z^j J_{\tau}[0, j] \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow x \\ |w| \geq j}} z^{|w|-j} K_{\tau}[j, |w|].
\end{aligned}$$

Da $J_{\tau}[a, a+1] = 0$ nach Lemma 5.2.22 ist, kann die Summierung bereits bei $j = 1$ beginnen. Durch Aufspalten der letzten Summe erhalten wir

$$\begin{aligned}
G_z(0, x; \tau) &= \delta_{0,x} + z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; \tau) + \sum_{j=1}^{\infty} z^j J_{\tau}[0, j] \\
&\quad \cdot \sum_{v \in Z^d} \sum_{\substack{w^{(1)}: 0 \rightarrow v \\ |w^{(1)}|=j}} \sum_{\substack{w^{(2)}: v \rightarrow x \\ |w^{(2)}| \geq 0}} z^{|w^{(2)}|} K_{\tau}[0, |w^{(2)}|].
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $G_z(v, x; \tau)$ folgt

$$\begin{aligned}
G_z(0, x; \tau) &= \delta_{0,x} + z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; \tau) + \sum_{v \in Z^d} \sum_{j=1}^{\infty} z^j J_{\tau}[0, j] \sum_{\substack{w^{(1)}: 0 \rightarrow v \\ |w^{(1)}|=j}} G_z(v, x; \tau) \\
&= \delta_{0,x} + z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; \tau) + \sum_{v \in Z^d} \sum_{\substack{w^{(1)}: 0 \rightarrow v \\ |w^{(1)}| \geq 1}} z^{|w^{(1)}|} J_{\tau}[0, |w^{(1)}|] G_z(v, x; \tau).
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Definition von $\Pi_z(0, v; \tau)$ erhalten wir das Ergebnis

$$G_z(0, x; \tau) = \delta_{0,x} + z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; \tau) + \sum_{v \in Z^d} \Pi_z(0, v; \tau) G_z(v, x; \tau). \quad \blacksquare$$

Beispiel 5.2.26 Wir wollen die erzeugende Funktion $G_z(0, x; \tau)$ für $x \in Z^d \setminus \{0\}$ mit der Gedächtnislänge $\tau = 2$ aufstellen.

Es sei w eine Irrfahrt, bei Gedächtnislänge von zwei enthalten die Laces alle Kanten der Länge zwei aus dem Intervall $\llbracket 0, |w| \rrbracket$, es gilt

$$J_{2,n}[0, |w|](w) = \begin{cases} \prod_{s=0}^{|w|-2} U_{s,s+2}(w), & \text{falls } |w| = n + 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und $J_2[0, |w|](w) = \prod_{s=0}^{|w|-2} U_{s, s+2}(w)$ für alle $|w| \geq 2$. Nach Satz 5.2.25 folgt

$$\begin{aligned} G_z(0, x; 2) &= z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; 2) + \sum_{v \in Z^d} \Pi_z(0, v; 2) G_z(v, x; 2) \\ &= z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; 2) + \sum_{v \in Z^d} \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow v \\ |w| \geq 1}} z^{|w|} J_2[0, |w|](w) G_z(v, x; 2). \end{aligned}$$

Wegen $J_2[0, 1] = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} G_z(0, x; 2) &= z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; 2) + \sum_{v \in Z^d} \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow v \\ |w| \geq 2}} z^{|w|} \prod_{s=0}^{|w|-2} U_{s, s+2}(w) G_z(v, x; 2) \\ &= z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; 2) + \sum_{v \in Z^d} \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow v \\ w(s) = w(s+2) \\ \forall s \in \llbracket 0, |w|-2 \rrbracket \\ |w| \geq 2}} z^{|w|} (-1)^{|w|-1} G_z(v, x; 2) \\ &= z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; 2) - \sum_{v \in Z^d} \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow v \\ w(s) = w(s+2) \\ \forall s \in \llbracket 0, |w|-2 \rrbracket \\ |w| \geq 2}} (-z)^{|w|} G_z(v, x; 2). \end{aligned}$$

Da wir nur über alle Irrfahrten w von 0 nach v mit $|w| \geq 2$ summieren, für die

$$w(s) = w(s+2), \quad \forall s \in \llbracket 0, |w|-2 \rrbracket$$

gilt, kann v nur Element aus $\Omega \cup \{0\}$ sein. Somit folgt:

$$\begin{aligned} G_z(0, x; 2) &= z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; 2) - 2d \sum_{N=0}^{\infty} z^{2N+2} G_z(0, x; 2) + \sum_{v \in \Omega} \sum_{N=0}^{\infty} z^{2N+3} G_z(v, x; 2) \\ &= z \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; 2) - 2d \frac{z^2}{1-z^2} G_z(0, x; 2) + \sum_{v \in \Omega} \frac{z^3}{1-z^2} G_z(v, x; 2) \\ &= \frac{z}{1-z^2} \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; 2) - 2d \frac{z^2}{1-z^2} G_z(0, x; 2). \end{aligned}$$

Durch Umstellen nach $G_z(0, x; 2)$ erhalten wir

$$G_z(0, x; 2) = \frac{z}{1-z^2 + 2dz^2} \sum_{y \in \Omega} G_z(y, x; 2).$$

Bemerkung 5.2.27

1. Die Lace Expansion wurde von Brydges und Spencer [BS85] eingeführt. Sie untersuchten damit schwache selbstvermeidende Irrfahrten, das sind Irrfahrten, bei denen der Faktor $1 + U_{st}$ durch $1 + \lambda U_{st}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ ersetzt wird.
2. Eine Anwendung der Lace Expansion ist die Cluster Expansion in der statistischen Mechanik und in der Quantenfeldtheorie, siehe dazu auch [Bry86].

Kapitel 6

Anwendung der Lace Expansion

In diesem Kapitel werden Anwendungen der Lace Expansion diskutiert. Im ersten Teil wird die Expansion für die erzeugende Funktion von Gitterbäumen hergeleitet. Im zweiten Teil wird eine ähnliche Ableitung für die Expansion der erzeugenden Funktion von Gittertieren gezeigt. Wir verwenden hierzu die Darstellung von Madras und Slade [MS96].

6.1 Expansion für Gitterbäume

Definition 6.1.1 Ein **Gitterbaum** ist ein kreisfreier zusammenhängender Teilgraph des Z^d . Falls $x \in Z^d$ ein Endpunkt einer Kante in \mathcal{T} ist, schreibt man $x \in \mathcal{T}$. Die Anzahl der Kanten in einem Baum \mathcal{T} sei $|\mathcal{T}|$.

Definition 6.1.2 Die erzeugende Funktion für Gitterbäume \mathcal{T} sei definiert durch

$$G_z^{\mathcal{T}}(x, y) := \sum_{\mathcal{T} \ni x, y} z^{|\mathcal{T}|}, \quad x, y \in Z^d.$$

Im Folgenden stellen wir die Expansion für die erzeugende Funktion $G_z^{\mathcal{T}}(x, y)$ in analoger Weise wie bei den selbstvermeidenden Irrfahrten auf. Dazu führen wir zunächst noch einige Definitionen ein.

Definition 6.1.3 [MS96] Es seien $x, y \in Z^d$ und ein Gitterbaum $\mathcal{T} \ni x, y$ gegeben. Der Weg, welcher aus Kanten von \mathcal{T} besteht, die x und y verbinden, nennt man **T-Rückgrat** $\beta_{\mathcal{T}}(x, y)$ von \mathcal{T} . Die Knoten im T-Rückgrat werden von x nach y mit $\beta_{\mathcal{T}}(0) = x$ bis $\beta_{\mathcal{T}}(n) = y$ bezeichnet. Beim Entfernen der Kanten im T-Rückgrat zerfällt der Gitterbaum \mathcal{T} in $n + 1$ disjunkte Bäume R_0, \dots, R_n , welche als **T-Rippen** bezeichnet werden.

Die Abbildung 6.1 zeigt einen Gitterbaum \mathcal{T} mit einem Weg der Länge n zwischen den Punkten x und y .

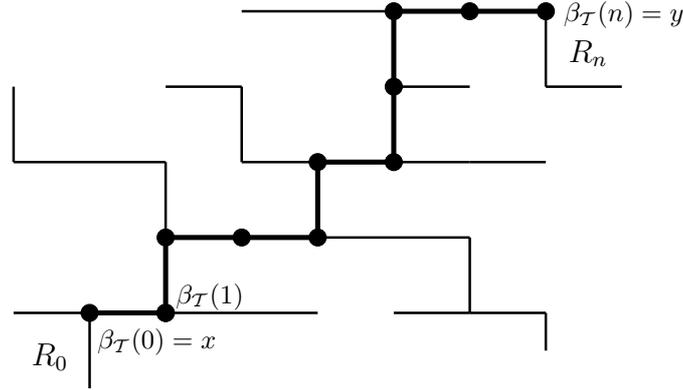


Abbildung 6.1: Gitterbaum

Definition 6.1.4 Gegeben sei die Menge $R := \{R_0, \dots, R_n\}$ von $n + 1$ Bäumen $R_i \subseteq Z^d$ und $s, t \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Dann seien

$$U_{st}^T(R) := \begin{cases} -1, & \text{falls } R_s \text{ und } R_t \text{ einen gemeinsamen Punkt besitzen} \\ 0, & \text{falls } R_s \text{ und } R_t \text{ keinen gemeinsamen Punkt besitzen} \end{cases}$$

und $|R_i|$ die Anzahl der Kanten in R_i .

Lemma 6.1.5 Für $x \in Z^d$ gilt

$$G_z^T(0, x) = \sum_{w: 0 \rightarrow x} z^{|w|} \left[\prod_{i=0}^{|w|} \sum_{R_i \ni w(i)} z^{|R_i|} \right] \prod_{0 \leq s < t \leq |w|} (1 + U_{st}^T(R)).$$

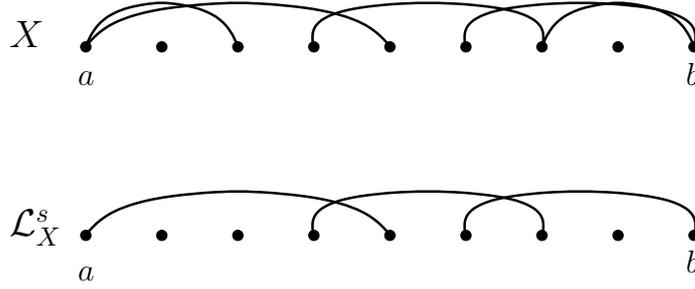
Beweis. Jede der inneren Summen über R_i ist eine Summe über Bäume, die $w(i)$ enthalten, dabei ist $R = (R_0, \dots, R_{|w|})$. Die äußere Summe über w ist die Summe über alle gewöhnlichen Irrfahrten von 0 nach x . Irrfahrten, welche nicht selbstvermeidend sind, liefern den Wert 0. ■

Definition 6.1.6 Ein G-Graph $X \subseteq V[a, b]$ heißt **schwach zusammenhängender G-Graph**, falls a und b Endpunkte von Kanten in X sind und wenn es für alle $c \in (a, b)$ Elemente $s, t \in \llbracket a, b \rrbracket$ gibt, sodass für $s < c < t$ entweder $\{s, t\} \in X$ oder $\{s, c\} \in X$ und $\{c, t\} \in X$ gilt.

Beispiel 6.1.7 Der G-Graph

$$X = \{\{0, 3\}, \{3, 5\}\} \subset V[0, 5]$$

ist schwach zusammenhängend, aber nicht stark zusammenhängend.


 Abbildung 6.2: G-Graph X und semi-Minimal Lace \mathcal{L}_X^s

Definition 6.1.8 Ein **semi-Lace** ist ein schwach zusammenhängender G-Graph, bei dem durch Entfernen einer Kante der G-Graph nicht mehr schwach zusammenhängend ist.

Definition 6.1.9 Es sei $X \subseteq V[a, b]$ ein schwach zusammenhängender G-Graph, dann sei $s_1 := a$ und $t_1 := \max\{t \mid at \in X\}$ und weiter

$$\begin{aligned} t_i &:= \max\{t \mid st \in X, s \leq t_{i-1}\}, \\ s_i &:= \min\{s \mid st_i \in X\}, \quad i \geq 2. \end{aligned}$$

Das Rekursionsende ist $t_k = b$. Der **semi-Minimal Lace** \mathcal{L}_X^s zu X ist definiert durch die Menge der Kanten $\{s_1t_1, s_2t_2, \dots, s_k, t_k\}$.

Die Abbildung 6.2 zeigt einen G-Graphen X und den dazugehörigen semi-Minimal Lace \mathcal{L}_X^s .

Bemerkung 6.1.10 Der semi-Minimal Lace ist nur für schwach zusammenhängende G-Graphen X definiert. Damit ist \mathcal{L}_X^s stets schwach zusammenhängend.

Definition 6.1.11 Es sei R eine Menge von Bäumen im Z^d und $a, b \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a < b \leq |R|$. Dann sei $\mathcal{L}[a, b] := \mathcal{L}_{b-a}[a, b]$,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X) &:= \{st \in V[a, b] \setminus X \mid \mathcal{L}_{X \cup \{st\}}^s = X\}, \\ K[a, b](R) &:= \prod_{st \in V[a, b]} (1 + U_{st}^T(R)), \\ J[a, b](R) &:= \sum_{X \in \mathcal{L}[a, b]} \prod_{st \in X} U_{st}^T(R) \prod_{s't' \in \mathcal{C}(X)} (1 + U_{s't'}^T(R)) \end{aligned}$$

und $K[a, a](R) := J[a, a](R) := 1$.

Zur Vereinfachung der Notation lassen wir im Folgenden das Argument R von $K[a, b](R)$ und $J[a, b](R)$ weg.

Lemma 6.1.12 Für alle $b \geq 1$ gilt:

$$K[0, b] = K[1, b] + \sum_{a=1}^{b-1} J[0, a]K[a+1, b] + J[0, b].$$

Beweis. Dieses Ergebnis folgt aus Lemma 5.2.23 mit Ersetzung von stark zusammenhängend durch schwach zusammenhängend. ■

Es sei wieder Ω die Menge der adjazenten Punkte des Ursprungs des Z^d . Ein Paar $\{x, y\}$ mit $x, y \in Z^d$ und $y - x \in \Omega$ ist damit eine Kante des Z^d . Nun präsentieren wir die Expansion für Gitterbäume.

Satz 6.1.13 [MS96] Für $x \in Z^d$ gilt:

$$G_z^T(0, x) = \delta_{0,x}g_z^T + \Pi_z^T(0, x) + zg_z^T \sum_{u \in \Omega} G_z^T(u, x) + z \sum_{(u,v) \in E(Z^d)} \Pi_z^T(0, u)G_z^T(v, x)$$

mit

$$g_z^T := \sum_{T \ni 0} z^{|T|},$$

$$\Pi_z^T(0, x) := \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow x \\ |w| \geq 1}} z^{|w|} \left[\prod_{i=0}^{|w|} \sum_{R_i \ni w(i)} z^{|R_i|} \right] J[0, |w|].$$

Beweis. Durch Anwendung von Lemma 6.1.12 auf

$$G_z^T(0, x) = \sum_{w: 0 \rightarrow x} z^{|w|} \left[\prod_{i=0}^{|w|} \sum_{R_i \ni w(i)} z^{|R_i|} \right] K[0, |w|]$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} G_z^T(0, x) &= \sum_{R_0 \ni 0} z^{|R_0|} \delta_{0,x} + \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow x \\ |w| \geq 1}} z^{|w|} \left[\prod_{i=0}^{|w|} \sum_{R_i \ni w(i)} z^{|R_i|} \right] K[1, |w|] \\ &+ \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow x \\ |w| \geq 2}} z^{|w|} \left[\prod_{i=0}^{|w|} \sum_{R_i \ni w(i)} z^{|R_i|} \right] \sum_{a=1}^{|w|-1} J[0, a]K[a+1, |w|] \\ &+ \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow x \\ |w| \geq 1}} z^{|w|} \left[\prod_{i=0}^{|w|} \sum_{R_i \ni w(i)} z^{|R_i|} \right] J[0, |w|]. \end{aligned}$$

Der erste und der letzte Term auf der rechten Seite kann als $g_z^T \delta_{0,x}$ und $\Pi_z^T(0, x)$ geschrieben werden. Für den zweiten Term folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow x \\ |w| \geq 1}} z^{|w|} \left[\prod_{i=0}^{|w|} \sum_{R_i \ni w(i)} z^{|R_i|} \right] K[1, |w|] &= \sum_{R_0 \ni 0} z^{|R_0|} z \sum_{u \in \Omega} G_z^T(u, x) \\ &= z g_z^T \sum_{u \in \Omega} G_z^T(u, x). \end{aligned}$$

Im dritten Term zerlegen wir w in zwei Teilwege w_1 von 0 nach u und in einen Weg w_2 von v nach x . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{w: 0 \rightarrow x \\ |w| \geq 2}} z^{|w|} \left[\prod_{i=0}^{|w|} \sum_{R_i \ni w(i)} z^{|R_i|} \right] \sum_{a=1}^{|w|-1} J[0, a] K[a+1, |w|] \\ &= z \sum_{(u,v) \in E(Z^d)} \sum_{\substack{w_1: 0 \rightarrow u \\ |w_1| \geq 1}} z^{|w_1|} \left[\prod_{i=0}^{|w_1|} \sum_{R_i \ni w_1(i)} z^{|R_i|} \right] J[0, |w_1|] \\ &\quad \times \sum_{\substack{w_2: v \rightarrow x \\ |w_2| \geq 0}} z^{|w_2|} \left[\prod_{i=0}^{|w_2|} \sum_{R_i \ni w_2(i)} z^{|R_i|} \right] K[0, |w_2|] \\ &= z \sum_{(u,v) \in E(Z^d)} \Pi_z^T(0, u) G_z^T(v, x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

6.2 Expansion für Gittertiere

Definition 6.2.1 Ein **Gittertier** \mathcal{A} ist ein zusammenhängender Teilgraph des Z^d . Falls $x \in Z^d$ ein Endpunkt einer Kante in \mathcal{A} ist, schreibt man $x \in \mathcal{A}$. Die Anzahl der Kanten in einem Gittertier \mathcal{A} sei $|\mathcal{A}|$.

Wir wollen nun analog wie bei Gitterbäumen, nur mit ein wenig abgeänderter Definitionen, die Expansion für die erzeugende Funktion für Gittertiere herleiten. Die Modifikationen der Definitionen sind notwendig, da es bei Gittertieren im Allgemeinen nicht nur einen Weg zwischen zwei Punkten $x, y \in Z^d$ gibt.

Definition 6.2.2 [MS96] Sei \mathcal{A} ein Gittertier mit $x, y \in \mathcal{A}$. Eine Kantenfolge zwischen x und y heißt **Doppelverbindung**, falls zwei disjunkte (teilen sich keine gemeinsame Kante) selbstvermeidende Irrfahrten in \mathcal{A} zwischen x und y existieren oder $x = y$ gilt. Eine Kante $\{u, v\}$ in \mathcal{A} heißt **Hauptkante** oder **Brücke** zwischen x und y , falls bei der Entfernung dieser Kante das Gittertier in zwei zusammenhängende Teilgraphen zerfällt, mit x in der einen und y in der anderen Teilgraphen.

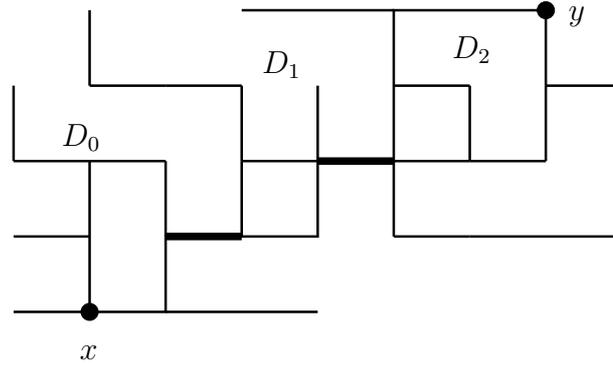


Abbildung 6.3: Gittertier

Definition 6.2.3 Die erzeugende Funktion für Gittertiere \mathcal{A} sei definiert durch

$$G_z^{\mathcal{A}}(x, y) := \sum_{\mathcal{A} \ni x, y} z^{|\mathcal{A}|}, \quad x, y \in Z^d.$$

Definition 6.2.4 [MS96] Gegeben seien zwei Punkte $x, y \in Z^d$ und ein Gittertier $\mathcal{A} \ni x, y$. Das **A-Rückgrat** von \mathcal{A} ist die Menge aller Hauptkanten in dem Weg zwischen x und y . Es entstehen zusammenhängende Graphen, nachdem das A-Rückgrat aus dem Gittertier \mathcal{A} entfernt wurde, man nennt sie **A-Rippen** D_i von \mathcal{A} .

Bemerkung 6.2.5 Im Allgemeinen sind hier A-Rückgrat im Gegensatz zu den T-Rückgrat im vorigen Abschnitt nicht zusammenhängend.

Definition 6.2.6 Die Menge aller Gittertiere, die eine Doppelverbindung zwischen x und y besitzen, sei $\mathcal{D}_{x,y}$. Wir definieren

$$g_z^{\mathcal{A}}(x, y) := \sum_{D \in \mathcal{D}_{x,y}} z^{|D|}.$$

In Abbildung 6.3 ist ein Gittertier \mathcal{A} dargestellt mit $x, y \in \mathcal{A}$. Dieses Gittertier besitzt zwei A-Rückgrate (fett gedruckte Kanten). Falls diese entfernt werden, zerfällt das Gittertier \mathcal{A} in drei A-Rippen D_0, D_1, D_2 .

Definition 6.2.7 Es seien $D := \{D_0, D_1, \dots, D_n\}$ eine Menge von A-Rippen und $s, t \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Dann sei

$$U_{st}^{\mathcal{A}}(D) := \begin{cases} -1, & \text{falls } D_s \text{ und } D_t \text{ einen gemeinsamen Punkt besitzen} \\ 0, & \text{falls } D_s \text{ und } D_t \text{ keinen gemeinsamen Punkt besitzen.} \end{cases}$$

Definition 6.2.8 Es sei $x \in Z^d$ und

$$B := ((u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n))$$

eine endliche geordnete Tupel von gerichteten Kanten des Z^d sowie $v_0 := 0$ und $u_{|B|+1} := x$.

Lemma 6.2.9 *Es sei B eine Menge, welche die Voraussetzungen der vorangehenden Definition erfüllt. Dann gilt für $x \in Z^d$*

$$G_z^A(0, x) = \sum_{B:|B| \geq 0} z^{|B|} \left[\prod_{i=0}^{|B|} \sum_{D_i \in \mathcal{D}_{v_i, u_{i+1}}} z^{|D_i|} \right] \prod_{0 \leq s < t \leq |B|} (1 + U_{st}^A(D)).$$

Beweis. Diese Formel folgt mit analogen Überlegungen wie bei Gitterbäumen. Wir ersetzen dort alle Irrfahrten w von 0 nach x durch die Menge B aller gerichteten Kanten von 0 nach x . Die innere Summe läuft dann über alle Doppelverbindungen zwischen v_i nach u_{i+1} . ■

Zur Vereinfachung der Notation ersetzen wir in Definition 6.1.11 in $K[a, b]$ und $J[a, b]$ die Variable $U_{st}^T(R)$ durch $U_{st}^A(D)$.

Satz 6.2.10 [MS96] *Für $x \in Z^d$ gilt*

$$\begin{aligned} G_z^A(0, x) &= g_z^A(0, x) + \Pi_z^A(0, x) + z g_z^A(0, u) \sum_{(u \in \Omega)} G_z^A(u, x) \\ &\quad + z \sum_{(u, v) \in E(Z^d)} \Pi_z^A(0, u) G_z^A(v, x) \end{aligned}$$

mit

$$\Pi_z^A(0, x) := \sum_{B:|B| \geq 1} z^{|B|} \left[\prod_{i=0}^{|B|} \sum_{D_i \in \mathcal{D}_{v_i, u_{i+1}}} z^{|D_i|} \right] J[0, |B|].$$

Beweis. Durch Anwendung von Lemma (6.1.12) auf

$$G_z^A(0, x) = \sum_{B:|B| \geq 0} z^{|B|} \left[\prod_{i=0}^{|B|} \sum_{D_i \in \mathcal{D}_{v_i, u_{i+1}}} z^{|D_i|} \right] K[0, |B|]$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
G_z^A(0, x) &= \sum_{D \in D_{0,x}} z^{|D|} + \sum_{B:|B| \geq 1} z^{|B|} \left[\prod_{i=0}^{|B|} \sum_{D_i \in \mathcal{D}_{v_i, u_{i+1}}} z^{|D_i|} \right] K[1, |B|] \\
&+ \sum_{B:|B| \geq 2} z^{|B|} \left[\prod_{i=0}^{|B|} \sum_{D_i \in \mathcal{D}_{v_i, u_{i+1}}} z^{|D_i|} \right] \sum_{a=1}^{|B|-1} J[0, a] K[a+1, |B|] \\
&+ \sum_{B:|B| \geq 1} z^{|B|} \left[\prod_{i=0}^{|B|} \sum_{D_i \in \mathcal{D}_{v_i, u_{i+1}}} z^{|D_i|} \right] J[0, |B|].
\end{aligned}$$

Der erste und der letzte Term auf der rechten Seite kann als $g_z^A(0, x)$ und $\Pi_z^A(0, x)$ geschrieben werden. Für den zweiten Term folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{B:|B| \geq 1} z^{|B|} \left[\prod_{i=0}^{|B|} \sum_{D_i \in \mathcal{D}_{v_i, u_{i+1}}} z^{|D_i|} \right] K[1, |B|] &= \sum_{D \in D_{0,u}} z^{|D|} z \sum_{u \in \Omega} G_z^A(u, x) \\
&= z g_z^A(0, u) \sum_{u \in \Omega} G_z^A(u, x).
\end{aligned}$$

Im dritten Term zerlegen wir B in zwei Teilwege B_1 von 0 nach u und in einen Weg B_2 von v nach x . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{B:|B| \geq 2} z^{|B|} \left[\prod_{i=0}^{|B|} \sum_{D_i \in \mathcal{D}_{v_i, u_{i+1}}} z^{|D_i|} \right] \sum_{a=1}^{|B|-1} J[0, a] K[a+1, |B|] \\
&= z \sum_{(u,v) \in E(Z^d)} \sum_{B_1:|B_1| \geq 1} z^{|B_1|} \left[\prod_{i=0}^{|B_1|} \sum_{D_i \in \mathcal{D}_{v_i, u_{i+1}}} z^{|D_i|} \right] J[0, |B_1|] \\
&\quad \times \sum_{B_2:|B_2| \geq 0} z^{|B_2|} \left[\prod_{i=0}^{|B_2|} \sum_{D_i \in \mathcal{D}_{v_i, u_{i+1}}} z^{|D_i|} \right] K[0, |B_2|] \\
&= z \sum_{(u,v) \in E(Z^d)} \Pi_z^A(0, u) G_z^A(v, x). \blacksquare
\end{aligned}$$

Kapitel 7

Komplexität des Anzahlproblems

Die Komplexitätstheorie klassifiziert algorithmische Probleme gemäß ihres Bedarfes an Berechnungsressourcen, z.B. Rechenzeit oder Speicherplatz. Ziel ist, für ein spezielles Problem ein effizientes Verfahren anzugeben oder zu zeigen, dass kein effizientes Verfahren existiert.

Wir stellen im Kapitel 7.1 zunächst einige wichtige Komplexitätsklassen vor. Im nächsten Abschnitt ordnen wir das Problem der Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten der Länge N zwischen zwei Punkten $x, y \in Z^2$ in diese Komplexitätsklassen ein.

7.1 Wichtige Komplexitätsklassen

7.1.1 Entscheidungsprobleme

Definition 7.1.1 Eine **Instanz** eines Problems ist ein spezieller Parametersatz für alle Variablen dieses Problems, sodass eine exakt definierte Aufgabe entsteht. Es sei $T_A(I)$ die Anzahl der elementaren Rechenschritte, die der Algorithmus A für die Lösung eines Problems mit der gegebenen Instanz I benötigt. Mit $|I|$ bezeichnet man die Größe der Instanz I und mit

$$T_A(n) := \max\{T_A(I) \mid |I| = n\}$$

die **worst case complexity**.

Bemerkung 7.1.2 Die Größe einer Instanz kann die Anzahl der Variablen, die Dimension einer Matrix oder auch die Anzahl der Knoten oder Kanten eines Graphen sein.

Definition 7.1.3 Es seien $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei reellwertige Funktionen. Man schreibt

$$f(n) = O(g(n)),$$

wenn Konstanten $n_0 \in \mathbb{N}$ und $C \in \mathbb{R}^+$ existieren, sodass

$$|f(n)| \leq C|g(n)|, \quad \forall n \geq n_0$$

gilt.

Ein Problem heißt Entscheidungsproblem, falls die Lösung des Problems entweder Ja oder Nein bedeutet. Entscheidungsprobleme sind beispielsweise die Fragen danach, ob ein Graph einen Hamiltonkreis besitzt oder eine natürliche Zahl eine Primzahl ist.

Bemerkung 7.1.4 Im Folgenden werden wir ein Problem und eine Sprache mit einander identifizieren. So gehören beispielsweise alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$, die nur die Teiler 1 und n besitzen zur Sprache L_p der Primzahlen. Ein Entscheidungsproblem für eine natürliche Zahl n lautet dann: Ist $n \in L_p$?

Definition 7.1.5 Ein Entscheidungsproblem bzw. Sprache heißt **polynomial lösbar**, wenn ein Algorithmus der Komplexität $O(n^k)$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ für seine Lösung existiert. Die Menge aller in polynomialer Zeit lösbaren Probleme bezeichnet man mit P .

Definition 7.1.6 Es sei NP die Menge aller Sprachen mit der Eigenschaft, dass sämtliche Ja-Instanzen (Instanzen, für die die Lösung des Entscheidungsproblem Ja lautet) einen in polynomialen Zeit verifizierbaren Beweis besitzen.

Bemerkung 7.1.7 Streng formal definiert man die Komplexitätsklassen P und NP mittels deterministischer bzw. nichtdeterministischer Turingmaschinen. Da hier nur eine kurze Einführung zum Thema Komplexitätstheorie gegeben wird, wollen wir mit den vereinfachten Definitionen von P und NP arbeiten. Wir verweisen für weitergehende Informationen auf die einschlägige Literatur, wie beispielsweise Garey, Johnson [GJ79] und Schöning [Sch01].

Definition 7.1.8 Seien $L_1 \subseteq \Sigma^*$ und $L_2 \subseteq \Gamma^*$ Sprachen über den Alphabeten Σ^* und Γ^* . Dann heißt L_1 auf L_2 **polynomial reduzierbar**, symbolisch $L_1 \leq_p L_2$, falls es eine mit polynomialer Komplexität berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ gibt, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2.$$

Definition 7.1.9 Eine Sprache L_1 heißt **NP-schwer**, falls jede Sprache $L_2 \in NP$ in polynomialer Zeit auf L_1 reduzierbar ist ($L_2 \leq_p L_1$). Die Sprache L_1 heißt **NP-vollständig**, falls L_1 NP-schwer und $L_1 \in NP$ ist. Die Menge aller NP-vollständigen Probleme bezeichnet man mit NPC .

Lemma 7.1.10 Falls $L_1 \leq_p L_2$ und $L_2 \leq_p L_3$ gilt, folgt daraus $L_1 \leq_p L_3$.

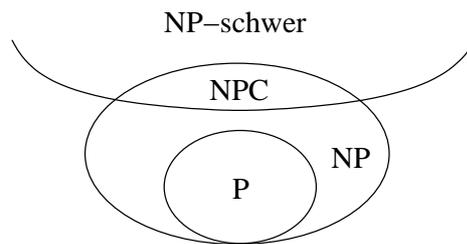


Abbildung 7.1: Komplexitätsklassen

Beweis. Es seien L_1, L_2, L_3 Sprachen über den Alphabeten $\Sigma_1^*, \Sigma_2^*, \Sigma_3^*$ und $f_1 : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ und $f_2 : \Sigma_2^* \rightarrow \Sigma_3^*$ polynomiale Transformationen von L_1 nach L_2 bzw. L_2 nach L_3 . Dann sei die Funktion $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_3^*$ definiert durch $f(x) = f_2(f_1(x))$, $\forall x \in \Sigma_1^*$, eine Transformation von L_1 nach L_3 . Es gilt $f(x) \in L_3$ genau dann, wenn $x \in L_1$. Die Transformation f ist polynomial, da die Summe zweier hintereinander ausgeführter polynomialer Transformationen wieder eine polynomiale Transformation ist. ■

Bemerkung 7.1.11 Es gilt trivialerweise $P \subseteq NP$ (Abbildung 7.1), aber ob die beiden Komplexitätsklassen gleich oder echt ineinander enthalten sind, ist unbekannt. Dieses Problem wird auch das **P-NP Problem** genannt. Es ist eins von sieben Problemen der Mathematik, für deren Lösung im Jahre 2000 vom Clay Mathematics Institute eine Preisgeld in Höhe von 1.000.000 Dollar ausgesetzt wurde.¹

Lemma 7.1.12 Falls $L_1 \leq_p L_2$ und $L_2 \in P$, so ist auch $L_1 \in P$.

Beweis. Wenn $L_2 \in P$, gibt es eine polynomiale Berechnungsvorschrift für L_2 . Da nach Voraussetzung $L_1 \leq_p L_2$ gilt, folgt, dass es eine polynomiale Transformation von L_1 nach L_2 gibt. Die Summe beider Transformationen ist wieder polynomial und damit ist $L_1 \in P$. ■

Satz 7.1.13 [Sch01] Sei $A \in NPC$. Dann gilt:

$$A \in P \Leftrightarrow P = NP.$$

Beweis. Sei $A \in P$ und $L \in NP$ beliebig. Da A nach Voraussetzung NP-vollständig ist, gilt $L \leq_p A$. Mit Anwendung von Lemma 7.1.12 folgt: $L \in P$. Wegen L beliebig aus NP, folgt $P=NP$.

Sei umgekehrt $P=NP$ angenommen. Da $A \in NP$, ist auch $A \in P$. ■

Satz 7.1.14 [Sch01] Es seien $L_1, L_2 \in NP$, L_1 NP-vollständig und $L_1 \leq_p L_2$. Dann ist L_2 NP-vollständig.

¹siehe dazu www.claymath.org

Beweis. Da $L_2 \in \text{NP}$, brauchen wir nur die Definition der NP-Vollständigkeit anzuwenden und zu zeigen, dass für alle $L' \in \text{NP}$ gilt: $L' \leq_p L_2$. Nach Voraussetzung ist $L_1 \in \text{NPC}$, daraus folgt $L' \leq_p L_1$. Wegen $L_1 \leq_p L_2$ und mit der Eigenschaft der Transitivität von \leq_p folgt $L' \leq_p L_2$. ■

Bemerkung 7.1.15

1. Aus Satz 7.1.13 folgt, wenn es zu einem NP-vollständigen Problem einen polynomialen Algorithmus gibt, kann jedes Problem in NP in polynomialer Zeit gelöst werden.
2. Der Satz 7.1.14 liefert uns eine Methode zum Nachweis der NP-Vollständigkeit eines Problems. Falls man von einem Problem A nachweist, dass es die Eigenschaft der NP-Vollständigkeit erfüllt, kann dieses dazu genutzt werden, um weitere NP-vollständige Probleme zu finden. Die allgemeinen Schritte zum Nachweis, dass ein Problem A NP-vollständig ist, sind dann die Folgenden:
 - (a) Nachweis, dass $A \in \text{NP}$ ist.
 - (b) Auswahl eines bekannten NP-vollständigen Problems B .
 - (c) Konstruktion einer Transformation f von B zu A .
 - (d) Nachweis, dass f eine polynomiale Transformation ist.

Beispiel 7.1.16 [Sch01] Die Folgenden Probleme sind NP-vollständig:

- Gegeben sei eine aussagenlogische Formel F , d.h. eine Formel mit Variablen x_i bzw. $\neg x_i$ (\neg - Negation) die mittels \vee und \wedge verküpft sind. Gibt es eine Belegung der Variablen von F mit Konstanten aus $\{0, 1\}$, sodass F den Wert 1 erhält? ²
- Gegeben sei ein Graph G . Besitzt G einen Hamilton-Kreis?
- Gegeben seien natürliche Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i = b$? (Rucksack Problem)

7.1.2 Zählprobleme

Ein Zählproblem ist ein Problem, bei dem die Anzahl der Lösungen für eine gegebene Instanz I gesucht wird.

Definition 7.1.17 Es sei FP die Menge aller in polynomialer Zeit lösbaren Zählprobleme. Die Komplexitätsklasse #P ist die Menge aller Zählprobleme der Form $f(x)$, sodass das Entscheidungsproblem $f(x) = 0$ in NP liegt.

²Dies war das erste NP-vollständige Problem, bekannt als das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik.

Definition 7.1.18 Ein Problem A heißt **#P-schwer**, falls jedes Problem $A' \in \#P$ in polynomialer Zeit auf A reduzierbar ist. Das Problem A heißt **#P-vollständig**, falls A #P-schwer ist und $A \in \#P$.

Beispiel 7.1.19 [Wel93] Die Folgenden Probleme sind #P-vollständig:

- Gegeben sei ein Graph G . Wie viele Hamiltonkreise besitzt G ?
- Gegeben sei eine aussagenlogische Formel F . Wie viele Belegungen der Variablen von F mit Konstanten aus $\{0, 1\}$ gibt es, sodass F den Wert 1 erhält?

Bemerkung 7.1.20 Es gibt Entscheidungsprobleme in P , für die das dazu gehörige Zählproblem nicht in polynomialer Zeit gelöst werden kann. Beispielsweise ist die Bestimmung der Anzahl aller perfekten Matchings in einen bipartiten Graphen #P-vollständig, aber das dazugehörige Entscheidungsproblem kann in polynomialer Zeit gelöst werden. Weitere Beispiele findet man in Welsh [Wel93]. Falls also $P=NP$ wäre, könnten alle Probleme in NP in polynomialer Zeit gelöst werden, aber nicht alle Zählprobleme.

7.2 Beweis der #P-Vollständigkeit

Im Jahre 1979 bewies Valiant [Val79], dass die Berechnung der Anzahl aller $s - t$ Wege in ungerichteten und gerichteten Graphen #P schwer ist. Fraglich war, ob auch die Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten gegebener Länge im zweidimensionalen Gitter in #P liegt. Liskiewicz, Ogihara und Toda [LOT01] zeigten, dass die Berechnung der Anzahl der selbstvermeidenden Irrfahrten gegebener Länge im zweidimensionalen Gitter #P-vollständig ist.

Zur Wiederholung, es sei $c_{N,d}(x, y)$ die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten der Länge N zwischen x und y im Z^d .

Lemma 7.2.1 [*] *Es sei $x, y \in Z^2$ und $N \geq 1$. Das Entscheidungsproblem*

$$c_{N,2}(x, y) > 0$$

liegt in P .

Beweis. Im zweidimensionalen Gitter gibt es zwischen zwei Punkten $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ stets mindestens eine selbstvermeidende Irrfahrt der Länge N , wenn die Bedingung

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + 2k = N$$

für ein $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Falls dies nicht der Fall ist, folgt $c_{N,2}(x, y) = 0$. ■

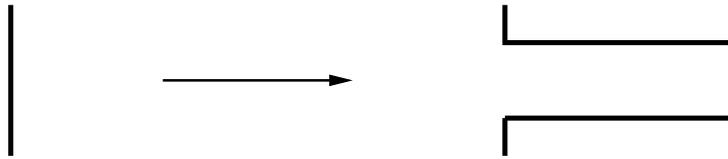


Abbildung 7.2: Biegung einer vertikalen Linie

Lemma 7.2.2 [LOT01] *Das Problem der Anzahlbestimmung aller Hamiltonschen Wege in planaren Graphen mit maximalem Knotengrad drei ist $\#P$ -vollständig.*

Satz 7.2.3 [LOT01] *Die folgenden Varianten des Problems der Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten im zweidimensionalen Gitter sind $\#P$ -vollständig:*

1. *Die Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten vom Ursprung zu einem speziellen Punkt mit einer bestimmten Länge.*
2. *Die Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten vom Ursprung zu einem beliebigen Punkt mit einer bestimmten Länge.*
3. *Die Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten zwischen zwei Punkten mit einer bestimmten Länge.*
4. *Die Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten vom Ursprung zu einem speziellen Punkt mit einer beliebigen Länge.*
5. *Die Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten vom Ursprung zu einem beliebigen Punkt mit einer beliebigen Länge.*
6. *Die Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten zwischen zwei Punkten mit einer beliebigen Länge.*

Beweis. Wir transformieren das Problem der Anzahlbestimmung aller Hamiltonscher Wege in einem planaren 3-regulären Graphen auf unser Problem der Bestimmung aller selbstvermeidenden Irrfahrten im zweidimensionalen Gitter. Wir zeigen hier nur die Aussagen 1-3.

Es ist bekannt, dass planare Graphen in polynomialer Zeit in das zweidimensionale Gitter eingebettet werden können (siehe dazu [CP95]). Es sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit maximalem Knotengrad drei und $n := |V|$. Wir konstruieren einen Graphen G' aus G mittels Hinzufügen zweier Knoten s' und t' und zweier Kanten (s, s') und (t, t') , $s, t \in V(G)$. Auf diesen neuen Graphen G' wenden wir unseren Einbettungsalgorithmus an und erhalten damit eine Einbettung von G' in das zweidimensionale Gitter.

Es sei U die Menge aller Bilder der Knoten von G in Bezug auf die Einbettung

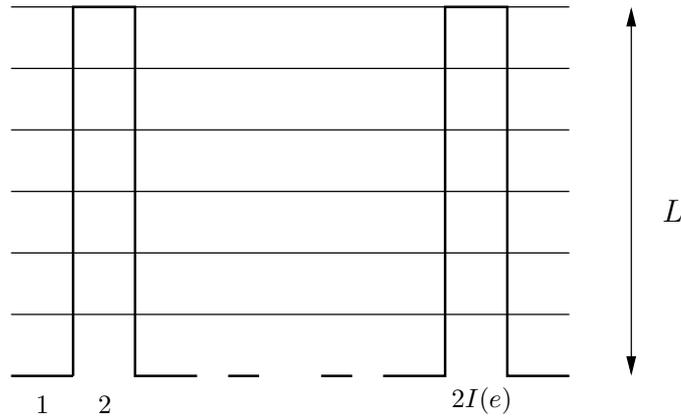


Abbildung 7.3: Konstruktion des Turms

von G' , und s' besitze die Koordinaten $(0,0)$ in der Einbettung. Das so entstandene zweidimensionale Gitter bezeichnen wir mit E_0 .

Jetzt konstruieren wir ein zweidimensionales Gitter E_1 wie folgt: Wir vergrößern E_0 mit dem Faktor vier. Wir ersetzen damit jeden Punkt (a, b) aus E_0 durch $(4a, 4b)$ und jede Kante $((a, b), (a', b'))$ von E_0 durch eine Kante der Länge vier von $(4a, 4b)$ nach $(4a', 4b')$. Für jede Kante $e \in E(G')$, die eine gerade vertikale Linie in E_0 ist, fügen wir eine Biegung der folgenden Form ein:

Wir nehmen an, dass die gerade Linie von (a, b) nach (a', b') führt, mit $b' \leq b - 4$. Dann ersetzen wir die Kante $((a, b - 1), (a, b - 2))$ durch den Weg (Abbildung 7.2):

$$(a, b - 1), (a + 1, b - 1), (a + 2, b - 1), (a + 3, b - 1), \\ (a + 3, b - 2), (a + 2, b - 2), (a + 1, b - 2), (a, b - 2).$$

Im Folgenden konstruieren wir aus dem Gitter E_1 ein Gitter E_2 . Für alle Kanten $e \in E(G')$ sei $\delta(e)$ die Länge des Weges, welcher e in E_1 realisiert und

$$L := \min\{l \mid l = a^2, a \in \mathbb{N}, l \geq n^2, \delta(e) \leq l, \forall e \in E(G')\}.$$

Wir vergrößern nun E_1 um den Faktor von L und bezeichnen das erhaltene Gitter mit E_1^* . Für alle Kanten $e \in E(G')$ sei $\delta^*(e)$ die Länge des Weges, welcher e in E_1^* darstellt. Die Längen dieser Wege sind gerade für alle Kanten $e \in E(G')$. Für alle $e \in E(G')$ ist damit $\delta^*(e)$ ein Vielfaches von $2L$.

Für jede Kante e aus G' führen wir nun das Folgende durch: Wir wählen eine horizontale Linie der Länge $2L + 1$ aus, die einen Teil eines Weges von e in E_1^* realisiert. Wir bezeichnen die $2L + 1$ Kanten mit $a(1), \dots, a(2L + 1)$ von links nach rechts. Dann ist

$$I(e) := \frac{L^2 - \delta^*(e)}{2L}$$

eine ganze Zahl. Wir ersetzen für alle i mit $1 \leq i \leq I(e)$ die Kante $a(2i)$ durch einen „Turm“ der Breite 1 und der Höhe L ausgehend von $a(2i)$ (Abbildung 7.3). Diese entstandene Konstruktion bezeichnen wir mit E_2 .

Jeder Turm vergrößert die Länge des Weges um $2L$. Damit haben wir alle Kanten $e \in E(G')$ durch einen Weg der Länge

$$\delta^*(e) + 2L \cdot I(e) = L^2$$

realisiert. Da G' genau $n + 2$ Knoten besitzt, wird jeder Hamiltonsche Weg in G' durch einen Weg in E_2 der Länge

$$h := L^2(n + 1)$$

realisiert. Jeder Weg in E_2 mit der Länge h entspricht einem Hamiltonschen Weg in G' . Die Anzahl der selbstvermeidenden Irrfahrten in E_2 mit der Länge h entsprechen dann genau der Anzahl aller Hamiltonscher Wege in G' . Damit ist die polynomiale Reduktion vom Hamiltonschen Weg auf die Aussagen 1, 2 und 3 hergestellt. Den Beweis der Aussagen 4-6 findet man in [LOT01]. ■

Folgerung 7.2.4 [*] *Es sei $N \geq 1$ und $M \in \mathbb{N}$ eine beliebige Konstante. Dann ist das Entscheidungsproblem*

$$c_{N,2}(x, y) \leq M, \tag{7.1}$$

#P-schwer und insbesondere NP-schwer.

Beweis. Wir nehmen an, wir können (7.1) in polynomialer Zeit lösen. Da $c_{N,2}(x, y) \in I_c := \llbracket 0, 4^N \rrbracket$ für alle $N \geq 1$ ist, kann man mittels Intervallhalbierung von I_c den Wert $c_{N,2}(x, y)$ bestimmen. Dazu benötigt man maximal $O(N)$ Schritte. Bei jedem Schritt löst man mit dem hypothetischen polynomialen Algorithmus das Problem (7.1). Damit können wir $c_{N,2}(x, y)$ in polynomialer Zeit bestimmen. Da dieses Problem aber #P-schwer ist, muss das Entscheidungsproblem $c_{N,2}(x, y) \leq M$ #P-schwer und insbesondere NP-schwer sein. ■

Definition 7.2.5 Eine **geschlossene selbstvermeidende Irrfahrt** der Länge N im Z^d ist eine Irrfahrt, die im Ursprung 0 des Z^d startet und endet und in dem dazwischenliegenden Teil die Eigenschaft der Selbstvermeidung erfüllt. Ein **selbstvermeidendes Polygon** ist eine geschlossene selbstvermeidende Irrfahrt im Z^2 . Als identisch gelten alle Polygone, die durch Translation auseinander hervorgehen. Es sei k_N die Anzahl aller selbstvermeidenden Polygone der Länge N im Z^2 , die nicht durch Translation auseinander hervorgehen.

Bemerkung 7.2.6 Selbstvermeidende Polygone treten nur in gerader Länge auf. Die Abbildung 7.4 zeigt alle selbstvermeidenden Polygone der Länge 4, 6 und 8.

N	4	6	8	10	12	14	16	18
k_N	1	2	7	28	124	588	2938	15268

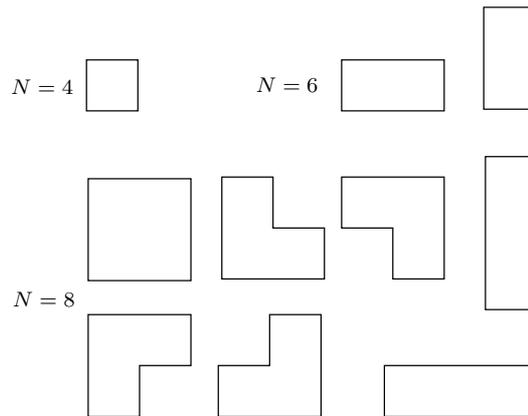


Abbildung 7.4: Polygone der Länge $N = 4$, $N = 6$ und $N = 8$

Satz 7.2.7 [*] Die Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Polygone der Länge N ist $\#P$ -vollständig.

Beweis. Es sei wieder Ω die Menge aller adjazenten Punkte des Ursprungs 0 im Z^2 . Aus der Definition von k_N folgt, dass $2N \cdot k_N$ die Anzahl aller geschlossenen selbstvermeidenden Irrfahrten der Länge N im Z^2 sind.

Da es genauso viele horizontale wie vertikale Kanten in jeder geschlossenen selbstvermeidenden Irrfahrt gibt, ist $2c_{N-1}(0, x)$, $x \in \Omega$ die Anzahl aller geschlossenen selbstvermeidenden Irrfahrten der Länge N , die entweder rechts oder links um den Ursprung gehen. Damit erhalten wir

$$k_N = \frac{2}{N} c_{N-1}(0, x), \quad x \in \Omega. \quad \blacksquare$$

Bemerkung 7.2.8 Die Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten der Länge N vom Ursprung des zweidimensionalen Gitter ist nach Satz 7.2.3 $\#P$ -vollständig. Damit kann man aber nicht die Existenz einer Funktion $\psi(z)$ ausschließen, für die

$$C_2(z) = \sum_{N \geq 0} \frac{\psi^{(N)}(0)}{N!} z^N$$

gilt, hierbei ist $\psi^{(N)}(z)$ die N -te Ableitung von $\psi(z)$. Die Bestimmung der Koeffizienten der Taylorreihenentwicklung von $\psi(z)$ muss damit aber $\#P$ -vollständig sein. Fraglich ist, ob solche Funktionen mit dieser Eigenschaft überhaupt existieren.

Thesen

Wir geben nun eine Zusammenfassung der in dieser Diplomarbeit enthaltenen Ergebnisse.

1. Die Bestimmung der Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten gegebener Länge im d -dimensionalen Gitter, zählt zu einem der schwierigsten Probleme der Enumerativen Kombinatorik.
2. Es existieren zur Zeit nur für Untergraphen des Z^d erzeugende Funktionen für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten.
3. Mit Hilfe von Automaten lassen sich erzeugende Funktionen für die Anzahl aller Irrfahrten im Z^2 ableiten, die keine Kurzzyklen enthalten. Mit dieser Methode lassen sich obere Schranken für die Bindungskonstante ableiten.
4. Aus der Methode der Inklusion-Exklusion und der Lace Expansion kann eine Formel für die erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten zwischen zwei Punkten $x, y \in Z^d$ aufgestellt werden.
5. Die Lace Expansion liefert ein Verfahren, mit deren Hilfe man die Expansion für die erzeugende Funktion von Gitterbäumen und Gittertieren herleiten kann.
6. Das Problem der Bestimmung aller selbstvermeidenden Irrfahrten der Länge N zwischen zwei Punkten $x, y \in Z^2$ ist #P-vollständig.

Literaturverzeichnis

- [Aig97] M. Aigner, *Combinatorial Theory*, Springer, New York, 1997.
- [Bry86] D.C. Brydges, *A short course on cluster expansions*, In K. Osterwalder und R. Stora, editors, *Critical Phenomena, Random Systems, Gauge Theories*, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [BS85] D.C. Brydges, T. Spencer, *Self-avoiding walk in 5 or more dimensions*, Commun. Math. Phys. 97, 1985.
- [CP95] M. Chrobak, T.H. Payne, *A linear-time Algorithm for Drawing a planar Graph in a grid*, Inf. Proc. Letter 54, 1995.
- [Doh02] K. Dohmen, *A note on Zeilberger's abstract lace expansion*, Adv. Appl. Math. 28, 2002.
- [Doh03] K. Dohmen, *Improved Bonferroni Inequalities via Abstract Tubes*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [FS01] P. Flajolet, R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics: Functional Equations, Rational and Algebraic Functions*, INRIA, 2001.
- [GJ79] M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and Intractability*, Bell Telephone Laboratories, 1979.
- [HU01] J. E. Hopcroft, J.D. Ullman, *Einführung in die Automatentheorie, Formale Sprachen und Komplexitätstheorie*, Addison-Wesley, München, 2001.
- [LOT01] M. Liskiewicz, M. Ogihara, S. Toda, *The Complexity of Counting Self-Avoiding Walks in Two-Dimensional Grid Graphs and in Hypercube Graphs*, Elec. Coll. on Comp. Compl. 61, 2001.
- [MS96] N. Madras, G. Slade, *The Self-Avoiding Walk*, Birkhäuser, Bosten, 1996.
- [PT00] A. Pönitz, P. Tittmann, *Improved Upper Bounds for Self-Avoiding Walks in Z^d* , Elec. Jour. of Comb. 7, 2000.

- [Sch01] U. Schöning, *Theoretische Informatik-kurzgefasst*, Spektrum, Heidelberg, Berlin, 2001.
- [Tit00] P. Tittmann, *Einführung in die Kombinatorik*, Spektrum, Heidelberg, Berlin, 2000.
- [Tit01a] P. Tittmann, *Irrfahrten in Graphen*, unveröffentlicher Artikel, <http://www.htwm.de/peter/publikat.html>, 2001.
- [Tit01b] P. Tittmann, *Erzeugende Funktion für geschlossene Irrfahrten in Z^2* , unveröffentlicher Artikel, <http://www.htwm.de/peter/publikat.html>, 2001.
- [Tit01c] P. Tittmann, *Wörter, Automaten und erzeugende Funktionen*, unveröffentlicher Artikel, <http://www.htwm.de/peter/publikat.html>, 2001.
- [Tit03] P. Tittmann, *Graphentheorie*, Fachbuchverlag Leipzig, 2003.
- [Val79] L. Valiant, *The complexity of enumeration and reliability problems*, SIAM J. Comput. 8, 1979.
- [Wel93] D. J. A. Welsh, *Complexity: Knots, Colourings and Counting*, Cambridge University Press, 1993.
- [Wil96] L. K. Williams, *Enumerating-up-side self-avoiding walks on integer lattices*, Elec. Jour. of Comb. 3, 1996.
- [Zei95] D. Zeilberger, *Self-avoiding walks, the language of science, and Fibonacci numbers*, arXive e-print math.CO/9506214, 1995.
- [Zei97] D. Zeilberger, *The abstract lace expansion*, Adv. Appl. Math. 19, 1997.

Abbildungsverzeichnis

3.1	Selbstvermeidende Irrfahrten im Z^2	7
3.2	Selbstvermeidende Irrfahrt der Länge 7	10
3.3	Gitterstreifen	13
3.4	Brückengraph B	15
3.5	3×3 Gitter $B3$	16
3.6	Gittergraph G3	17
3.7	Ausschnitt aus dem Brückengraph	18
5.1	nicht stark zusammenhängende und stark zusammenhängende G- Graphen	39
5.2	G-Graph X und Minimal Lace \mathcal{L}_X	40
6.1	Gitterbaum	50
6.2	G-Graph X und semi-Minimal Lace \mathcal{L}_X^s	51
6.3	Gittertier	54
7.1	Komplexitätsklassen	59
7.2	Biegung einer vertikalen Linie	62
7.3	Konstruktion des Turms	63
7.4	Polygone der Länge $N = 4$, $N = 6$ und $N = 8$	65

Abkürzungen und Symbole

$ M , \#M$	Mächtigkeit der Menge M
\overline{M}	Komplementmenge von M
$[a, b]$	geschlossenes ganzzahliges Intervall zwischen $a, b \in \mathbb{Z}$
(a, b)	offenes ganzzahliges Intervall zwischen $a, b \in \mathbb{Z}$
$\{x, y\}$	Kante zwischen Knoten x und y
$\ x\ $	Euklidische Norm
$f(x) \sim g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$
\circ	Verkettungsoperator zweier Irrfahrten
\times	Verkettungsoperator für Menge von Irrfahrten
\setminus	Mengendifferenz
\neg	Negation
\vee	logisches Oder
\wedge	logisches Und
\leq_p	polynomiale Reduktion von Sprachen
0	Ursprung des Z^d
\emptyset	leere Menge
A	Automat
A_S	Menge aller Irrfahrten zw. 0 u. $x \in Z^d$ der Länge N , die im Schritt S zur 0 zurückkehren und sonst selbstverm. sind
A_{st}	Menge aller Irrfahrten w der Länge N zwischen 0 und $x \in Z^d$ mit $w(s) = w(t)$ für $st \in V_\tau[a, b]$, $N \geq b$
\mathcal{A}	Gittertier
B	geordnete Menge von gerichteten Kanten
$B_\tau[a, b]$	Menge aller Graphen mit Kanten aus $V_\tau[a, b]$
$\beta_{\mathcal{T}}(x, y)$	T-Rückgrat vom Gitterbaum \mathcal{T}
$c(G)$	Anzahl der Komponenten eines Graphen G
$c_N, c_{N,d}$	Anz. der selbstv. Irrf. im Z^d der Länge N vom Ursprung
$c_N(x, y), c_{N,d}(x, y)$	Anz. der selbstv. Irrf. im Z^d der Länge N zwischen x und y
$c_N^{[0,1]}$	Anz. der selbstv. Irrf. in $[0, 1] \times (-\infty, \infty)$ der Länge N
$C_d(z)$	Erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenden Irrfahrten vom Ursprung des Z^d aus
$\mathcal{C}_N, \mathcal{C}_{N,d}$	Menge aller selbstv. Irrf. im Z^d der Länge N vom Ursprung

$\mathcal{C}_N(x, y)$	Menge aller selbstv. Irrf. im Z^d der Länge N zw. x und y
$\mathcal{C}(X)$	Menge aller Kanten aus $V[a, b]$ die mit L kompatibel sind
$\mathcal{C}_\tau(X)$	Menge aller Kanten aus $V_\tau[a, b]$ die mit L kompatibel sind
$\mathcal{C}_l(I)$	Menge in der Abstract Lace Expansion
$\chi(A)(a)$	=1, falls $a \in A$; =0 sonst
δ	Übergangsfunktion eines Automaten
$\delta_{x,y}$	Kroneckersymbol
$D_\tau[a, b]$	Menge aller nicht stark zusammenh. G-Graphen aus $B_\tau[a, b]$
D_i	A-Rippe vom Gittertier
D	Menge von A-Rippen
$\mathcal{D}_{x,y}$	Menge aller Gittertiere mit einer Doppelverb. zw. x und y
ϵ	leeres Wort
E	Einheitsmatrix
$E(G)$	Kantenmenge eines Graphen G
F	Menge der Endzustände eines Automaten
F_n	n -te Fibonacci Zahl
G	gerichteter oder ungerichteter Graph
G_{-e}	Graph, der durch Entfernen von Kante e aus G hervorgeht
G_{-v}	Graph, der durch Entfernen von Knoten v aus G hervorgeht
$G_z(x, y)$	Erzeugende Funktion für die Anzahl aller selbstvermeidenen Irrfahrten im Z^d zwischen x und y
$G_z(x, y; \tau)$	Erzeugende Funktion für die Anz. aller Irrfahrten im Z^d zwischen x und y mit Gedächtnislänge τ
$G_z^A(x, y)$	Erzeugende Funktion für Gittertiere
$G_z^T(x, y)$	Erzeugende Funktion für Gitterbäume
$\mathcal{G}_\tau[a, b]$	Menge aller stark zusammenhängende Graphen aus $\mathcal{B}_\tau[a, b]$
γ	kritischer Exponent für c_n
Γ	Kelleralphabet
$\Gamma(G, v)$	Menge der adjazenten Knoten von v im Graphen G
I	Instanz eines Problems
I_{ab}	= $\{a, a + 1, \dots, b - 1, b\}$
$I[\text{Aussage}]$	=1, falls Aussage=Wahr; =0 sonst
$J_\tau[a, b], J_{\tau,n}[a, b]$	selbstvermeidende Interaktion
$K_\tau[a, b]$	selbstvermeidende Interaktion
$l(X)$	Lace Abbildung
L	Sprache
$L(A)$	Sprache eines Automaten A
\mathcal{L}_X	Minimal G-Graph von X
\mathcal{L}_X^s	semi-Minimal Lace von X
$\mathcal{L}[a, b]$	Menge aller semi-Laces aus $B_{b-a}[a, b]$
$\mathcal{L}_\tau[a, b]$	Menge aller Laces aus $B_\tau[a, b]$
$\mathcal{L}_{\tau,n}[a, b]$	Menge aller Laces aus $B_\tau[a, b]$ mit n Kanten

μ	Bindungskonstante
N	Länge einer Irrfahrt
$O(g(n))$	Landau Symbol
$\mathcal{P}(V)$	Menge aller Teilmengen der Menge V
$\mathcal{P}^*(V)$	Menge aller nichtleeren Teilmengen der Menge V
$\Pi_z(0, x; \tau)$	Zweipunkt Funktion in der Lace Expansion
$\Pi_z^{(n)}(0, x; \tau)$	Zweipunkt Funktion in der Lace Expansion
q_0	Startzustand eines Automaten
Q	Menge der Zustände eines Automaten
R_i	T-Rippe vom Gitterbaum
R	Menge von T-Rippen
st	Kante von s nach t
$s_N(G, v)$	Anzahl der selbstvermeidenden Irrfahrten im Graphen G der Länge N vom Knoten v
$\mathcal{S}_N(x, y)$	Menge aller Irrfahrten der Länge N von x nach y
$\sigma(A)$	Maß von A
Σ	Alphabet
Σ^n	Menge aller Wörter der Länge n über Σ
Σ^*	Menge aller Wörter über Σ
\mathcal{T}	Gitterbaum
$T_A(n)$	Worst case complexity
τ	Gedächtnislänge
u_s	Anzahl aller selbstvermeidenden Kreise der Länge S
U	Grund bzw. Universalmenge
U_S	Menge aller selbstvermeidenden Kreise der Länge S
$U_{st}(w)$	$= -1$, falls $w(s) = w(t)$; $= 0$ sonst
U_{st}^A	-1 , falls D_s und D_t einen gem. Punkt besitzen; $=0$ sonst
U_{st}^T	-1 , falls R_s und R_t einen gem. Punkt besitzen; $=0$ sonst
$V[a, b]$	Menge aller Kanten aus I
$V_\tau[a, b]$	Menge aller Kanten aus I der Länge kleiner gleich τ
$V(G)$	Knotenmenge eines Graphen G
w	Irrfahrt
$ w $	Länge einer Irrfahrt w
Ω	Menge aller adjazenten Punkte des Ursprungs
X	G-Graph
Z_0	Kellerstartsymbol
Z^d	d-dimensionales Gitter

Index

- #P, 60
- #P-schwer, 61
- #P-vollständig, 61
- A-Rippen, 54
- A-Rückgrat, 54
- Abstract Lace Expansion, 42
- Bindungskonstante, 10
- Brückengraph, 15
- connective constant, 10
- DEA, 20
- deterministischer Automat, 20
 - Anfangszustand, 20
 - Eingabealphabet, 20
 - Endzustandsmenge, 20
 - erweiterte Übergangsfunktion, 20
 - Sprache, 21
 - Zustandsmenge, 20
 - Übergangsfunktion, 20
- Doppelverbindung, 53
- erzeugende Funktion, 21
- Fibonacci Zahlen, 13
- FP, 60
- G-Graph, 39
 - Kante, 39
 - kompatibel, 41
 - Länge, 39
 - schwach zusammenhängender, 50
 - stark zusammenhängender, 39
- Gitterbaum, 49
- Gittertier, 53
- Graph Terminologie, 3
- Hauptkante, 53
- hyperdimensionales Gitter, 6
- Inklusion-Exklusion, 34
- Instanz, 57
- Irrfahrt, 6
 - Gedachtnislänge, 38
 - geschlossene selbstvermeidende, 64
 - gewöhnliche, 6
 - Länge, 7
 - selbstvermeidende, 7
- Kellerautomat, 26
 - ϵ -Übergang, 27
 - Anfangszustand, 26
 - deterministischer, 27
 - Eingabealphabet, 26
 - Endzustandsmenge, 26
 - Kelleralphabet, 26
 - Kellerstartsymbol, 26
 - Konfiguration, 26
 - Sprache, 27
 - Zustandsmenge, 26
 - Übergangsfunktion, 26
- Kreis, 7
 - selbstvermeidender, 7
- kritischen Exponenten, 11
- l-Lace, 42
- Lace, 40
- Lace Abbildung, 42
- Maß, 34
- Minimal G-Graph, 40
- Minimal Lace, 40
- NP, 58

NP-schwer, 58
NP-vollständig, 58
NPC, 58

P, 58
polynomial reduzierbar, 58

selbstvermeidendes Polygon, 64
semi-Lace, 51
semi-Minimal Lace, 51
Sprache
 eindeutige, 21
 kontextfreie, 27
 polynomial lösbar, 58
 reguläre, 21

T-Rippen, 49
T-Rückgrat, 49

worst case complexity, 57
Wörter und Sprachen, 4

Zyklus, 7

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Mittweida, 02. 08. 2004