Übungen zur Vorlesung Komplexitätstheorie
Sommersemester 2008

Prof. Dr. J. Torán
Abt. Theoretische Informatik
Übungen: F. Wagner

Aufgabenblatt 1

24. April 2008

Aufgabe 1
Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *k-färbbar*, falls man die Knoten mit k Farben markieren kann, sodaß benachbarte Knoten verschiedene Farben haben. Formal: eine k-Färbung ist eine Abbildung $f : V \to \{1, \dots, k\}$, mit der Eigenschaft $f(u) \neq f(v)$ für alle $(u, v) \in E$. Das Graph-Färbungsproblem besteht darin, für einen gegebenen Graphen eine Färbung mit möglichst wenig Farben zu berechnen. Es ist einfach zu entscheiden ob ein Graph 1- oder 2-färbbar ist. Die 2-färbbaren Graphen sind übrigens genau die bipartiten Graphen. Andererseits gehört das Problem für $k \geq 3$ zu den algorithmisch schwierigen Problemen.

a) Geben Sie Algorithmen an die entscheiden, ob ein Graph 1- bzw. 2-färbbar ist.

b) Algorithmus Brute-Force-Colouring testet einen Graphen $G = (V, E)$ auf 3-Färbbarkeit, indem er systematisch *alle* Abbildungen $f : V \to \{1, 2, 3\}$ betrachtet und jeweils prüft ob sie eine 3-Färbung sind. Welche Laufzeit hat Brute-Force-Colouring?

c) Geben Sie einen *nichtdeterministischen* Algorithmus an, der für einen Graph G und $k > 1$ entscheidet, ob G k-färbbar ist.

Überlegen Sie jeweils, wie und mit welchem Platz- und Zeitverbrauch die Algorithmen auf einer Mehrband-Turingmaschine ausgeführt werden können.

Aufgabe 2
Sei $L = \{0^p 1^q \mid p = q \text{ und } p, q \in \mathbb{N}\}$.

a) Schildern Sie die Arbeitsweise einer Mehrbandturingmaschine mit separatem (nur-lese) Eingabeband, die auf Eingabe $x \in \{0, 1\}^*$ entscheidet, ob $x \in L$. Achten Sie auf möglichst geringen Zeitverbrauch (bzw. Platzverbrauch auf den Arbeitsbändern)!

b) Betrachten Sie eine entsprechende (möglichst zeiteffiziente) Einband-Turingmaschine.

c) Kann man eine Einband-Turingmaschine angeben, die nur $o(\log(|x|))$ Speicherplatz auf dem Arbeitsband benötigt? (Hinweis: Chinesischer Restsatz)

Aufgabe 3
Sei $x \in \{0, 1\}^*$ ein Wort mit Länge n mit genau $\log n$ Einsen. Geben Sie eine obere Schranke für die Kolmogorov-Komplexität von x an.

Aufgabe 4
Sei $S \subseteq \{0, 1\}^*$ eine entscheidbare Menge mit höchtens n^2 Wörtern der Länge n für jedes n. Zeigen Sie, dass für jedes Wort $x \in S$ gilt: $K(x) \in O(\log(|x|))$.