

## Aufgabenblatt 2

### Aufgabe 1

Eine *richtige Komplexitätsfunktion*  $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  ist wie folgt definiert:  $f(n) \leq f(n+1)$  für alle  $n$  und es gibt eine Mehrband-Turingmaschine  $M$ , die bei beliebiger Eingabe  $x$  auf den Arbeitsbändern  $O^{f(|x|)}$  in  $\text{TIME}(O(|x| + f(|x|)))$  und  $\text{SPACE}(O(f(|x|)))$  berechnet. Welche Bedeutung hat diese Definition?

a) Seien  $f(n)$  und  $g(n)$  richtige Komplexitätsfunktionen. Zeigen Sie, dass  $f(n)+g(n)$ ,  $f(n) \cdot g(n)$  und  $2^{f(n)}$  auch richtige Komplexitätsfunktionen sind.

b) Welche der folgenden sind richtige Komplexitätsfunktionen?

$n \cdot \lceil \sin(n) \rceil$ ,  $\lceil \log(n) \rceil$ ,  $\lceil \log(n) \rceil + \lceil \log(\lceil \log(n) \rceil) \rceil$ ,  
 $\lceil \log(n) \rceil^2$ ,  $n^3 + 2n$ ,  $n \cdot \lceil \log(n) \rceil$ ,  $2^n$ ,  $n!$ .

### Aufgabe 2

Sei  $L \subseteq \Sigma^*$ . Wir definieren  $L^* = \{x \in \Sigma^* \mid x = x_1x_2 \dots x_k, \text{ und } x_1, x_2, \dots, x_k \in L\}$   
Zeigen Sie:

a)  $L \in \text{P} \Rightarrow L^* \in \text{P}$  (Hinweis: Dynamisches Programmieren)

b)  $L \in \text{NP} \Rightarrow L^* \in \text{NP}$

### Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für alle  $k > 0$   $\text{TIME}(n^k) \neq \text{TIME}(n^{k+1})$ .

### Aufgabe 4

Definition: Ein *Pfad-Graph* ist ein Graph wie in folgender Abbildung:



Definition: **KNOTENORDNUNGSPROBLEM:**

Gegeben ist ein Pfad-Graph  $G = (V, E)$  mit  $V = v_1, \dots, v_n$  und die Indizes  $i, j \in 1, \dots, n$ . Gefragt ist, ob Knoten  $v_i$  vor  $v_j$  in  $G$  kommt.

Bsp:  $V = v_1, v_2, v_3, v_4$  und  $E = (v_4, v_1), (v_1, v_3), (v_3, v_2)$ ,  $i = 4, j = 3$ .

a) Zeigen Sie, dass das Problem  $\text{PFAD} = \{G \mid G \text{ ist ein Pfad}\}$  in L liegt.

b) Zeigen Sie, dass das Knotenordnungsproblem in L liegt.

c) Das **KNOTENHALBORDNUNGSPROBLEM** ist definiert wie das Knotenordnungsproblem, nur über andere Graphen: Zwei Knoten  $v_a, v_b$  sind verbunden, falls in der Halbordnung  $a < b$  gilt und es kein  $v_c$  gibt mit  $a < c < b$  (auch Hassediagramm genannt). Geben Sie einen Algorithmus an, der das Knotenhalbordnungsproblem auf einer nichtdeterministischen Logspace-beschränkten Mehrband-Turingmaschine löst.

### Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass  $\text{DSPACE}(n) \neq \text{NP}$ .

Hinweis: Zeigen Sie, dass  $\text{DSPACE}(n) \subseteq \text{NP}$  impliziert, dass  $\text{DSPACE}(n^2) \subseteq \text{NP}$ .