

## Aufgabenblatt 4

Wir geben zwei Definitionen für die Komplexitätsklasse *Zero-Error Probabilistic Polynomial-Time* ZPP an:

Definition 1: ZPP enthält alle Sprachen  $L$  für die eine probabilistische Turingmaschine  $M$  existiert mit polynomieller *erwarteter* Laufzeit, sodass:

$$\begin{aligned}x \in L &\Rightarrow \Pr[M(x) \text{ akzeptiert}] = 1, \\x \notin L &\Rightarrow \Pr[M(x) \text{ verwirft}] = 1,\end{aligned}$$

Definition 2: ZPP enthält alle Sprachen  $L$  für die eine probabilistische Turingmaschine  $M$  existiert mit den Eigenschaften:

$M$  berechnet einen der folgenden Ausgabewerte: 0, 1, ?,

$M$  berechnet die Ausgabe in polynomieller Laufzeit,

$M$  macht bei den Berechnungen keine Fehler. Das bedeutet:

$$\begin{aligned}x \in L &\Rightarrow \text{Ausgabe von } M \in \{1, ?\}, \quad \Pr[M \text{ gibt 1 aus}] \geq \frac{1}{2}, \\x \notin L &\Rightarrow \text{Ausgabe von } M \in \{0, ?\}, \quad \Pr[M \text{ gibt 0 aus}] \geq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

### Aufgabe 1

- Zeigen Sie, dass beide Definitionen äquivalent sind.
- Zeigen Sie,  $ZPP = RP \cap \text{co-RP}$ .

### Aufgabe 2

Zeigen Sie, falls  $NP \subseteq BPP$  dann gilt  $NP = RP$ .

### Aufgabe 3

Zeigen Sie, falls  $3SAT \leq^p \overline{3SAT}$  dann gilt  $PH = NP$ .

Definition (SUCCINCT SET-COVER): Sei  $S = \{\phi_1, \dots, \phi_m\}$  eine Menge von 3-DNF Formeln über  $n$  Variablen und  $k$  ein Integer. Gibt es ein  $S' \subseteq S$  der Größe  $k$ , sodass  $\bigvee_{\phi \in S'} \phi \equiv 1$ ?

### Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass SUCCINCT SET-COVER  $\in \Sigma_2^p$ .

Definition (VC-DIMENSION): Sei  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  eine endliche Grundmenge. Sei  $S = \{S_1, \dots, S_m\}$  eine Menge von Teilmengen von  $U$ . Die *VC-dimension* von  $S$ , kurz  $VC(S)$ , ist die größte Teilmenge  $X \subseteq U$  sodass es für jedes  $X' \subseteq X$  ein  $i$  gibt mit  $S_i \cap X = X'$ . Ein boolescher Schaltkreis  $C$  ist eine kurze Beschreibung von  $S$  (bzw.  $C$  repräsentiert  $S$ ) falls  $C(i, x) = 1$  genau dann wenn  $x \in S_i \subseteq U$  und  $C(i, x) = 0$  sonst. Der Schaltkreis  $C$  hat hierbei  $\log(m)$  bits zur Eingabe einer Zahl  $0 \leq i \leq m$  und  $\log(n)$  bits zur Eingabe von  $x \in U$ .

$VC\text{-DIMENSION} = \{ \langle C, k \rangle \mid C \text{ repräsentiert } S = \{S_1, \dots, S_m\} \text{ mit } VC(S) \geq k \}$ .

### Aufgabe 5

Zeigen Sie,  $VC\text{-DIMENSION} \in \Sigma_3^p$ .