Lösung zu Aufgaben 4 und 5 bei Aufgabenblatt 4.

Definition (SUCCINCT SET-COVER): Sei $S = \{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ eine Menge von 3-DNF Formeln über n Variablen und k ein Integer. Gibt es ein $S' \subseteq S$ der Größe k, sodass $\bigvee_{\phi \in S'} \phi \equiv 1$?

Lösung zu Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass SUCCINCT SET-COVER $\in \sum_2^p$.

$\exists i_1, \ldots, i_k \; \forall x_1, \ldots, x_n \; [\Phi_{i_1} \vee \ldots \vee \Phi_{i_k}] \;\; \wedge \bigwedge_{1 \leq j < j' \leq n} i_j \neq i_{j'}$.
Hierbei ist $k \in \{1, \ldots, n\}$ und $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ und $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$.
$\Rightarrow$ SUCCINCT SET-COVER $\in \Sigma_2^p$.

Definition (VC-DIMENSION): Sei $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ eine endliche Grundmenge. Sei $S = \{S_1, \ldots, S_m\}$ eine Menge von Teilmengen von U. Die *VC-dimension* von S, kurz $VC(S)$, ist die größte Teilmenge $X \subseteq U$ sodass es für jedes $X' \subseteq X$ ein i gibt mit $S_i \cap X = X'$. Ein boolscher Schaltkreis C ist eine kurze Beschreibung von S (bzw. C repräsentiert S) falls $C(i, x) = 1$ genau dann wenn $x \in S_i \subseteq U$ und $C(i, x) = 0$ sonst. Der Schaltkreis C hat hierbei $log(m)$ bits zur Eingabe einer Zahl $0 \leq i \leq m$ und $\log(n)$ bits zur Eingabe von $x \in U$.
VC-DIMENSION $= \{< C, k > | \; C$ repräsentiert $S = \{S_1, \ldots, S_m\}$ mit $VC(S) \geq k\}$.

Lösung zu Aufgabe 5: Zeigen Sie, VC-DIMENSION $\in \sum_3^p$.

Wir beschreiben $X = x_1, \ldots, x_n$ mit $x_i \in \{0, 1\}$. Falls $x_i = 1$ dann ist u_i in der Menge enthalten. Des weiteren beschreiben wir $X' = x'_1, \ldots, x'_n$ mit $x'_i \leq x_i$ (dies bedeutet auch $X' \subseteq X$).
$\exists X = x_1, \ldots, x_n \; \forall X' = x'_1, \ldots, x'_n \; \exists i \in \{1, \ldots, m\} \quad [X$ enthält k einsen$] \wedge [X'$ enthält $\leq k$ einsen$] \wedge \bigwedge_{l=1}^{n} x_l = 1 \wedge C(i, x_l) = 1 \leftrightarrow x'_l = 1$