Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
16.11.17, 14 Uhr
N24 - H15

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Finckh
L. Niebel
WiSe 17/18

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 04

In diesem Blatt sei (M, d) immer ein metrischer Raum.

Wir versehen $M^2 = M \times M$ mit der Produktmetrik
$d^2 : M^2 \times M^2 \to \mathbb{R},\ d^2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$.
Dadurch wird M^2 wieder zu einem Metrischen Raum, das müssen Sie nicht Zeigen.

1. Sei $A \subset M$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(i) A ist abgeschlossen $\iff A = \overline{A}$. (1)

(ii) Sei $B \subset A$. Es gilt $\overline{B} \subset \overline{A}$. (1)

(iii) $\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subset B \\ B \text{ abg.}}} B$. (2)

(iv) $A^\circ = \bigcup_{\substack{B \subset A \\ B \text{ offen}}} B$. (2)

(v) Es gilt: $(A^2)^\circ = (A^\circ)^2$, wobei $A^2 = A \times A$. (2)
Auf der linken Seite wird hierbei das Innere bezüglich der Produktmetrik gebildet.

2. Sei $\emptyset \neq A \subset M$.
Wir definieren für $x \in M$ den Abstand von x zu A durch

$$dist(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Zeigen Sie:

(i) $\forall x, y \in M$ gilt: $|dist(x, A) - dist(y, A)| \leq d(x, y)$. (2)

(ii) Es gilt $x \in \overline{A} \iff dist(x, A) = 0$. (4)

3. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen offen oder abgeschlossen sind, und bestimmen Sie das Innere, den Rand und den Abschluss. Sie müssen ausnahmsweise keine vollständigen Beweise angeben.

(i) $B_1(0) \cup \{(0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$. (1)

(ii) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. (1)

(iii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. (1)

(iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 = y\}$. (1)

4. Beweisen Sie: (2)
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ konvergiert gegen genau dann x, wenn für jede Teilfolge (TF) $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilteilfolge (TTF) $(x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ existiert, welche gegen x konvergiert.

5. In dieser Aufgabe wird es darum gehen, dass die Wahl der offenen Mengen in metrischen Räumen Äquivalent zum Konvergenzbegriff sind. (4*)
Sei $\tilde{d}$ eine weitere Metrik auf M. Betrachte die Systeme der offener Mengen:
$\mathcal{O} := \{O \subset M; \forall x \in O\ \exists \delta > 0\colon B_\delta^d(x) \subset O\}$ und
$\widetilde{\mathcal{O}} := \{O \subset M; \forall x \in O\ \exists \delta > 0\colon B_\delta^{\tilde{d}}(x) \subset O\}$ die bezüglich d bzw. $\tilde{d}$ offenen Mengen.
Hier bezeichnet $B_\delta^d(x) = \{y \in M; d(x,y) < \delta\}$ und $B_\delta^{\tilde{d}}(x) = \{y \in M; \tilde{d}(x,y) < \delta\}$.
Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ gilt
$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in M$ bezüglich $d \iff x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in M$ bezüglich $\tilde{d}$.

(ii) Für jedes $\delta > 0$ und $x \in M$ gilt $B_\delta^d(x) \in \widetilde{\mathcal{O}}$ und $B_\delta^{\tilde{d}}(x) \in \mathcal{O}$.

(iii) $\mathcal{O} = \widetilde{\mathcal{O}}$.

Hinweis: Für (i)→(ii) kann man Verwenden, dass eine Menge genau dann offen ist, wenn sie keine Randpunkte enthält (der Rand ist von der Metrik abhängig!). Ähnlich wie in der Vorlesung zeigt man für (ii)→(iii), dass man Offene Mengen als Vereinigung über δ Kuglen schreiben kann.
(iii)→(i) folgt mit der Konvergenzcharakterisierung aus der Vorlesung.