Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
23.11.17, 14 Uhr
N24 - H15

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Finckh
L. Niebel
WiSe 17/18

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 06

1. Finden Sie für die Funktionen $f_i \colon D_i \to \mathbb{R}$ für $i \in \{1,2\}$ die Inklusionsmaximale Teilmenge $D_i \subset \mathbb{R}^2$ auf der f_i stetig ist (bzw. stetig fortgesetzt werden kann).

(i) $f_1(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{|x|+y^2}}$ (2)

(ii) $f_2(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy}$ (3)

2. Zeigen oder Widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Sei $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachten Sie die Kugel $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ mit Radius r um den Ursprung bezüglich der normalen Euklidischen Norm $\|x\|_2 = (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}}$ und $r \in (0,\infty)$. (1)
Die Funktion $f : B_r(0) \to \mathbb{R},\ f(x) = \varphi(\|x\|_2)$ ist stetig.

(ii) Sei $M \neq \emptyset$ und $d \colon M \times M \to \{0,1\}$ die triviale Metrik. (1)
Es gibt eine Funktion $f \colon M \to \mathbb{C}$ welche unstetig ist.

(iii) Es gibt eine beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die nirgends stetig ist. (2)

(iv) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, ..., x_n) = x_1$ ist stetig. (2)
Selbstverständlich versehen wir $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}$ mit der Euklidischen Metrik.

3. Beweisen Sie mit dem ε-δ Kriterium, dass die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + \frac{1}{x}$ stetig ist. (4)

4. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Vektorräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. (5)
Sei $T \colon X \to Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) T ist stetig in einem $x_0 \in X$

(ii) T ist lipschitz stetig

(iii) T ist stetig auf X

(iv) T ist gleichmäßig stetig auf X

(v) Es existiert ein $C > 0$, sodass $\|Tx\|_Y \le C\|x\|_X$ für alle $x \in X$

5. Seien $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ metrische Räume. (4*)
Zeigen Sie, dass $f : M_1 \to M_2$ genau dann stetig ist, wenn $\forall A \subset M_1$ gilt, dass $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$