Universität Ulm

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Finckh
L. Niebel
WiSe 17/18

Abgabe und Besprechung:
7.12.17, 14 Uhr
N24 - H15

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 07

1. Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Kompaktheit.

(i) Im $\mathbb{R}^3$ mit dem euklidischen Abstand $\|\cdot\|_2$ die Menge (2)

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 \geq -1,\, \exp(x_1) + x_2^2 + x_3^{14} \leq 2,\, \exp(\|x\|_2) \leq \sqrt{5} \right\}.$$

(ii) Im Raum $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ die abgeschlossene Einheitskugel. (2)

(iii) Im normierten Raum $(C^0[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ die abgeschlossene Einheitskugel. (4*)

2. Wir betrachten den metr. Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und die Teilmenge $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

(i) Sind die folgenden Mengensysteme offene Überdeckungen von A? (1)

$$S_1 = \left\{ (q_1 - q_2, q_1 + q_2) \;\middle|\; q_1 \in \mathbb{Q}, q_2 \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty) \right\} \text{ und } S_2 = \left\{ \mathrm{B}_{\frac{1}{x}}\left((-1)^k\right) \;\middle|\; x > 0, k \in \mathbb{N} \right\}$$

(ii) Existiert jeweils eine endliche Teilüberdeckung von A? Ist A kompakt? (2)

3. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass jede Kugel $\mathrm{B}_r(x)$ konvex ist. (2)

4. Zeigen oder Widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es existiert ein metrischer Raum (M, d) und eine kompakte Teilmenge $K \subset M$, sowie eine Teilmenge $A \subset K$ abgeschlossen, die nicht kompakt ist. (2)

(ii) Die Menge $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0,\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ ist zusammenhängend. (2)

(iii) Für alle $n > 1$ ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zusammenhängend. (2)

(iv) $\mathbb{R}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ für $n > 1$. (2)

5. Wir betrachten den Vektorraum der reellen $n \times n$ Matrizen $\mathbb{R}^{n \times n}$ und bezeichnen mit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ die Untergruppe der invertierbaren Matrizen. Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definieren wir $\|A\|_{\mathrm{HS}} = \left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, die Hilbert-Schmidt Norm von A. Das Paar $(\mathbb{R}^{n \times n}, \|\cdot\|_{\mathrm{HS}})$ ist ein normierter Vektorraum, dies müssen Sie nicht zeigen. Ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ offen? Ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ kompakt? Ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ zusammenhängend? (3)