Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
14.12.17, 14 Uhr
N24 - H15

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Finckh
L. Niebel
WiSe 17/18

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II — Blatt 08

0. Sie sind alle herzlich eingeladen am **14.12.2017** um **16.00 Uhr nach** der Übung in **N24 - H9** auf einen Glühwein und Lebkuchen vorbeizukommen. (☺)
Es wäre schön, wenn Sie eine Tasse mitbringen könnten!

1. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf partielle Differenzierbarkeit und geben Sie, falls existent und wohldefiniert, die Jacobimatrix bzw. die Jacobideterminante an.

(i) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (e^x \sin(2xy), y \arctan(x))$. (2)

(ii) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \displaystyle\int_0^y \cos(t^2 x)\,\mathrm{d}t$. (2)

(iii) $f\colon (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi),\ (r,\vartheta,\varphi) \mapsto r(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$. (2)

(iv) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f(x) = Ax + b$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. (2)

(v) $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (\|x\|_2)^{n-2},\ n \geq 3$. (2)

(vi) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto (\|Ax - b\|_2)^2$ für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. (2)

2. Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) zwei metrische Räume und $K \subset M_1$ kompakt. (4)
Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f\colon K \to M_2$ bereits gleichmäßig stetig ist.

3. Betrachten Sie die folgende Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit (4)

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} dy$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist φ differenzierbar?

4. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger reeller Funktionen auf $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Es existiere ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ für alle $x \in [0,1]$ und $n \geq n_0$. zusätzlich konvergiere f_n punktweise gegen eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f_n gleichmäßig gegen f konvergiert. (4*)
Hinweis: Betrachte die Mengen $U_n = \{x \in [0,1] \,|\, f_n(x) - f(x) < \varepsilon\} \subset [0,1]$ *für jedes* $\varepsilon > 0$ *und* $n \in \mathbb{N}$.