Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
21.12.17, 14 Uhr
N24 - H15

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Finckh
L. Niebel
WiSe 17/18

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 09

1. Zeigen oder Widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Es existiert eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ derart, dass $\nabla f(x,y) = (xy, 2x)^T$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. (1)

(ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ total differenzierbar mit $\nabla f(x) = 0$ für alle $x \in U$, dann ist f konstant. (2)

(iii) Es existiert eine Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}^n$, die in 0 total differenzierbar ist. (3)

(iv) Für jede Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ ist $x \mapsto \|x\|^{1+\varepsilon}$ total differenzierbar in 0. (4*)

2. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ und $f\colon G \to \mathbb{R}^m$. Für alle $x \in G$ gelte (2)

$$\|f(x)\| \leq \ln(1 + \|x\|^2).$$

Zeigen Sie, dass f in 0 total differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(0) = 0$.

3. Sei $G = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 | r > 0, -\pi < \varphi < \pi\}$, $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\Phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^T$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ beliebig.

(i) Berechnen Sie die Ableitung von $v = u \circ \Phi\colon G \to \mathbb{R}$. (2)

(ii) Zeigen Sie, dass in G die Gleichung (3)

$$(\Delta u) \circ \Phi = \partial_r^2 v + \frac{1}{r}\partial_r v + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v$$

erfüllt ist.

4. Wir betrachten die Menge $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y, x \neq 0\}$ und die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{für} (x,y) \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(i) Untersuchen Sie f auf partielle Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}^2$. Welche ist die inkulsions maximale Menge auf der f partiell differenzierbar ist? (3)

(ii) Zeigen Sie im Punkt $(0,0)$ ist f in jede Richtung ν differenzierbar. (3)

(iii) Ist f in $(0,0)$ total differenzierbar? (1)