Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Finckh
L. Niebel
WiSe 17/18

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 10

1. Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto e^x \sin y \cos z$.

(i) Bestimme das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f an der Stelle $a = (0, 0, 0)$. (2)

(ii) Bestimme ein $r > 0$, so dass für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $\|(x, y, z)\|_2 < r$ gilt: (2)

$$|f(x, y, z) - T_1(x, y, z)| \leq \frac{1}{10}.$$

Bemerkung: Ausnahmsweise darf hierzu ein Taschenrechner verwendet werden.

2. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 1 + x^4 + y^4 - 3xy$.

(i) Bestimme das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f an den Stellen $a = (0, 0)$ und $b = (1, 1)$. (3)

(ii) Bestimme die Nullstellen von ∇f und entscheide, sofern möglich, ob es sich jeweils um ein lokales Extremum oder einen Sattelpunkt handelt. (3)

3. Es sei $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2 + 2x^2 + y^2$. Bestimme, sofern existent, alle lokalen und globalen Extrema von f. (4)

4. (i) Es seien $n \leq m$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rang} A = n$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Bestimme das globale Minimum von $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|Ax - b\|_2^2$. (3)

(ii) Es sei $c \in \mathbb{R}^m$. Folgere aus dem ersten Teil, dass $\overline{c} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} c_i$ das globale Minimum von $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{i=1}^{m}(x - c_i)^2$ ist. (3)

5. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U; \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in U$ mit $\lambda x + (1 - \lambda)y \in U$ für alle $\lambda \in [0, 1]$, gilt (4*)

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y - x)), (y - x)\rangle \mathrm{d}t.$$

Folgern Sie, ist U konvex und existiert ein $M > 0$, sodass $\|\nabla f(x)\| \leq M$ für alle $x \in U$, dann ist f Lipschitz stetig. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichnet hier das euklidische Skalarprodukt.