Universität Ulm
Abgabe und Besprechung:
18.1.18, 14 Uhr
N24 - H15

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Finckh
L. Niebel
WiSe 17/18

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 11

1. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(U;\mathbb{R})$.

(i) Ist x_0 striktes lokales Minimum, dann ist $H_f(x_0)$ positiv definit. (2)

(ii) Ist x_0 ein kritischer Punkt, aber keine Extremstelle, dann ist $H_f(x_0) = 0$ oder $H_f(x_0)$ ist indefinit. (2)

(iii) Ist K eine kompakte Teilmenge von U und ist $x_0 \in K$, sodass $f(x_0) = \sup_{x\in K} f(x)$ gilt, dann ist auch $\nabla f(x_0) = 0$. (2)

(iv) Es existiert genau eine Nullstelle von $f(x) = \cos(x) - x$ in $[0,\pi]$ (2)

2. Es sei $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ und $M = [1,\infty)$. Zeigen Sie, dass $f\colon M \to M$ wohldefiniert ist und $M \subset (0,\infty)$ bezüglich der euklidischen Topologie eine abgeschlossen Teilmenge ist. Beweisen sie, dass für alle $x, y \in M$ und $x \neq y$ die Ungleichung (4)

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

erfüllt ist. Besitzt f einen Fixpunkt in $[1,\infty)$?

3. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) = (e^x\cos(y), e^x\sin(y))^T$. Begründen Sie, dass f differenzierbar ist, berechnen Sie die Ableitung von f und bestimmen Sie die $x \in \mathbb{R}^2$, für die diese invertierbar ist. Ist f lokal/global injektiv? (4)

4. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)^T$. Zeigen Sie, dass für alle $(x,y) \neq (0,0)$ die Funktion in einer Umgebung von (x,y) lokal invertierbar ist und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $Df^{-1}(a,b)$ in $(a,b) = f(x,y)$. Ist f in einer Umgebung von $(0,0)$ invertierbar? (4)

5. Seien $T > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$ beliebig. Wir betrachten auf dem Raum der stetigen Funktionen $C[0,T]$ den linearen Operator (4*)

$$L\colon C[0,T] \to C[0,T],\ [Lu](t) := u_0 + \alpha \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s \text{ für } t \in [0,T].$$

Zeigen Sie, dass L genau einen Fixpunkt besitzt und folgern Sie, dass die Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \alpha u(t) & : t \in (0,T] \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

eine eindeutige stetig differenzierbare Lösung besitzt. *Hinweis: Betrachten Sie für* $\omega \in \mathbb{R}$ *die skalierte Supremumsnorm* $\|\cdot\|_{\infty,\omega} := \sup_{t\in[0,T]} |e^{\omega t} f(t)|$.