Universität Ulm
Abgabe und Besprechung:
25.1.18, 14 Uhr
N24 - H15

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Finckh
L. Niebel
WiSe 17/18

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 12

1. Bestimme den Euklidischen Abstand der Ebene (4)
$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 6z = 49\}$ zum Ursprung
(also minimiere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \|(x,y,z)\|_2$ unter $(x,y,z) \in E$).

2. Finde heraus, ob das Infimum oder Supremum von (2)
$f : M \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = 3x^3 + 42\sin(y) - 9z$ auf der Menge
$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^3 - 3z = 0\} \cap [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^3$ existiert und bestimme dieses gegebenenfalls.

3. Betrachte das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} e^{5x_1} + x_2^3 - 4x_2x_3 &= -15 \\ -x_1x_2 + 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Überprüfe, dass $a = (0,2,3)$ eine Lösung ist und zeige, dass man die Gleichung lokal um a nach zwei Variablen auflösen kann. (5)
Das bedeutet, dass man (nichtleere) offene Mengen $I \subset \mathbb{R}$ und $V \subset \mathbb{R}^2$ finden kann, sowie eine C^1-Funktion $\varphi : I \to V$, so dass man die Lösungsmenge der Gleichung lokal um a eindeutig durch φ mit einer Variablen ausdrücken kann. Berechne zudem noch $D\varphi$ an einer Stelle.

4. Zeige oder Widerlege die folgenden Aussagen:

(i) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und es sei $\|A\| < 1$ für eine induzierte Norm $\|\cdot\|$. Dann existiert für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x = Ax + b$. (2)

(ii) Entweder das Maximum oder das Minimum einer Rotationssymmetrischen Funktion auf $\overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^n$ wird auf dem Rand angenommen. (2)

(iii) Die Gleichung $x_1^2 + x_1^4x_2 - x_1^2x_3 = 0$ besitzt im Punkt $(0,1,2)$ lokal eine eindeutige C^1-glatte Auflösung $x_1 = \varphi(x_2,x_3)$ (wie im Satz über implizite Funktionen). (3)

5. Berechne die Länge eines Breitengrades einer Kugel in Abhängigkeit von $\vartheta \in [0,\pi)$ und $r > 0$. Nutze dafür Kugelkoordinaten, wie sie in Blatt 8 Aufgabe 1 (iii) gegeben sind. (2)

6. Es sei $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ und es sei x_0 eine einfache reelle Nullstelle des normierten Polynoms

$$P_a(x) := x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k,$$

also $P_a(x_0) = 0$ und $P_a'(x_0) \neq 0$. Zeige:
Einfache Nullstellen von Polynomen hängen lokal glatt von den Koeffizienten ab, genauer: (4*)
Es gibt ein $\varepsilon > 0$ und eine glatte Funktion $\varphi : B_\varepsilon(a) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(a) = x_0$, so dass für alle $b = (b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ mit $|a_i - b_i| < \varepsilon\ \forall i \in \{0, \dots, n\}$ eine einfache Nullstelle x_1 von $P_b(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ gegeben ist durch $x_1 = \varphi(b)$.