Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
1.2.18, 14 Uhr
N24 - H15

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Finckh
L. Niebel
WiSe 17/18

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 13

1. Entscheide, ob folgende Funktionen Gradientenfelder sind:

(i) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (e^y, xe^y, 1)$. (1)

(ii) $F\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y)\colon y \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (-\frac{y}{x^2}, \frac{1}{x})$. (1)

(iii) $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n, F(x) = \varphi(\|x\|_2)\frac{x}{\|x\|_2}$,
wobei $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist. (2)

2. Zeigen oder Widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und $\gamma \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}^n)$. Dann gilt (2)

$$\left| \int_\gamma f \cdot \mathbf{dx} \right| \leq \sup_{t\in[0,1]} \|f(\gamma(t))\|_2 L(\gamma)$$

(ii) Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (-y, x)$ und $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\sin(t), \cos(t))$. (1)
Es gilt $\int_\gamma f \cdot \mathbf{dx} = 0$

(iii) Ist $F + G$ ein Gradientenfeld, für $F, G \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, so sind es auch F und G. (1)

(iv) Der Graph stetiger monotoner Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist rektifizierbar. (1)

(v) Der Graph monotoner Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist rektifizierbar. (1)

3. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^1([0, 1]; K)$.
Ferner existiere ein $\gamma \in C^1([0, 1]; K)$, mit $\lim\limits_{k\to\infty} \|\gamma_k - \gamma\|_{C^1([0,1];K)} = 0$, wobei
$\|\gamma\|_{C^1([0,1];K)} = \sup\limits_{t\in[0,1]} \|\tilde{\gamma}(t)\|_2 + \sup\limits_{t\in[0,1]} \|\tilde{\gamma}'(t)\|_2$ für $\tilde{\gamma} \in C^1([0, 1]; K)$.
Zeige, dass dann

(i) (3)

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\gamma_k} f \cdot \mathbf{dx} = \int_\gamma f \cdot \mathbf{dx}.$$

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} L(\gamma_k) = L(\gamma)$. (1)

4. Eine Kreisscheibe mit Radius 1 rolle auf der x-Achse in $\mathbb{R}^2$ so dass der unterste Punkt am Anfang auf $(0, 0)$ steht und am Ende auf $(2\pi, 0)$. Γ_x bezeichne die Bahn eines mit dem Mittelpunkt der rollenden Kreisscheibe fest verbundenen Punktes x.

(i) Finde für $x \in \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung γ_x vom Γ_x. (3)

(ii) Für welche $x \in \mathbb{R}^2$ ist γ_x eine Jordankurve, wann ist sie geschlossen, und wann C^1? (2)

5. Definiere induktiv die Funktionen $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}, f_0(x) = x$ und für $n \in \mathbb{N}_0$ $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & \text{für } x \in [0, \frac{1}{3}) \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2) & \text{für } x \in (\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

(i) Skizziere die Funktionen f_k für $k \in \{1, 2, 3\}$. (1)

(ii) Zeige, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert. (3*)

(iii) Berechne für $n \in \mathbb{N}$ die Kurvenlänge der Funktion f_n. . (1*)

Hinweis: Nutze dazu die Selbstähnlichkeit der Funktion, also dass die Funktion z.B. auf dem Intervall $[0, \frac{1}{3})$ immer "so aussieht" wie auf $(\frac{2}{3}, 1]$