Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
8.2.18, 14 Uhr
N24 - H15

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Finckh
L. Niebel
WiSe 17/18

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 14

1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F \in C^0(U;\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen. (2+2*)

(i) F ist ein Gradientenfeld.

(ii) Es existiert eine Funktion $\varphi \in C^1(U;\mathbb{R})$, sodass für alle $x, y \in U$ und alle stückweise differenzierbaren Kurven $\gamma\colon [a,b] \to U$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ die Gleichung

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \int_\gamma F(x) \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

erfüllt ist. In diesem Fall gilt $\nabla\varphi(x) = F(x)$ für alle $x \in U$.

2. Wir betrachten das Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch $F(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ und den Weg $\gamma\colon [0, 3\pi+1] \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch (2)

$$\gamma(t) = \begin{cases} \exp(t)(\cos(t), \sin(t), 0)^T & : t \in [0,\pi] \\ (t-\pi)(0,\sqrt{2},\sqrt{2})^T + (1-t+\pi)(-e^\pi, 0, 0)^T & : t \in [\pi, \pi+1] \\ (-\pi-1, \sqrt{2}, \sqrt{2})^T + (t, \cos(t-1)+1, \sin(t-1)) & : t \in [\pi+1, 3\pi+1]. \end{cases}$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{x}$.

3. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Jede Lebesguesche Nullmenge ist beschränkt. (1)

(ii) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$, sodass U ein abgeschlossenes Intervall I mit $|I| > 0$ enthält, dann ist U keine Lebesguesche Nullmenge. (2)

(iii) Es existiert eine bezüglich der euklidischen Topologie offene nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die eine Lebesguesche Nullmenge ist. Gilt das für eine beliebige Topologie? (3)

(iv) Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige, nichtnegative Funktion, dann folgt aus $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ stets $f(x) = 0$ für alle $x \in I$. (3)

4. Bestimmen Sie, sofern existent, die folgenden Integrale.

(i) $\int_D x\sin(xy)\,\mathrm{d}(x,y)$ für die Menge $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \le x \le 1, 1 \le y \le \frac{1}{x}\}$. (2)

(ii) $\int_D x^2y\,\mathrm{d}(x,y)$, wobei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \text{ und } 0 \le y \le x\}$. (2)

(iii) $\int_D y^2\,\mathrm{d}(x,y)$, wobei D das Innere der Ellipse $4x^2 + y^2 = 4$ bezeichnet. (3)

(iv) $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log(x)}\,\mathrm{d}x$ für $0 < a < b$. (2*)