Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Finckh
L. Niebel
WiSe 17/18

24* Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 15

1. Berechnen Sie das Volumen des n-dimensionalen Tetraeders (4*)

$$T_n(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \geq 0,\ x_1 + \cdots + x_n \leq a\}$$

mit Seitenlänge $a = 1$. Folgern Sie daraus das Volumen des n-dimensionalen Tetraeders mit Seitenlänge $a > 0$.

2. Bestimmen Sie, sofern existent, die folgenden Integrale. (4*)

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad\qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Ist die Funktion $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$ integrierbar?

3. Zeigen Sie, dass jede Jordan-messbare Lebesgue-Nullmenge schon den Inhalt null hat. (4*)

4. Sei $G = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2 \text{ und } (|x| \geq 1 \text{ oder } |y| \geq 1)\}$. Berechnen Sie das folgende Integral: (4*)

$$\int_G x^2 + y^2\,\mathrm{d}(x,y).$$

5. [Satz von der impliziten Funktion] Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x,y,z) = z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1$. Beweisen Sie, dass $(1,1,1)$ eine Lösung von $F(x,y,z) = 0$ ist und dass es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(1,1)$, eine Umgebung $I \subset \mathbb{R}$ von 1 und eine C^1-Funktion $\varphi : U \to I$ gibt, so dass $\varphi(1,1) = 1$ und (4*)

$$\{(x,y,z) \in B_\varepsilon(1,1,1) \mid F(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,\varphi(x,y)) \mid (x,y) \in U\}$$

für ein $\varepsilon > 0$ gilt.

6. [Lagrange-Multiplikatoren] Sei $q > 0$ und $q^n = \prod_{i=1}^n x_i$ für positive Zahlen x_i. Zeigen Sie, dass die Ungleichung (4*)

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\dots(1 + x_n) \geq (1 + q)^n$$

erfüllt ist. Zeigen Sie ferner, dass die Gleichheit nur gilt, falls $x_1 = \cdots = x_n = q$ ist.