Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Finckh
L. Niebel
WiSe 17/18

0 Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Weihnachtsblatt

1. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Untersuchen Sie f im Punkt $(0,0)$ sowohl auf Existenz aller Richtungsableitungen als auch auf totale Differenzierbarkeit.

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + y^2$ und $v \in \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.
Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Welches v maximiert, bzw. minimiert diesen Wert?
Wie hängt das mit dem Gradienten zusammen?
Bemerkung: Der Gradient gibt die Richtung des steilsten Anstieges an.

3. Seien $[a,b], [c,d] \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig.
Zeigen oder widerlegen Sie $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, mit $F(x) = \sup\limits_{y \in [c,d]} f(x,y)$ ist stetig.

4. Beweisen Sie: Eine Cauchyfolge in einem metrischen Raum (M,d) konvergiert genau dann, wenn Sie eine konvergente Teilfolge besitzt.

5. Sei (M,d) ein metrischer Raum und I eine Menge.
Für jedes $i \in I$ sei $A_i \subset M$ eine abgeschlossene Menge und es existiere ein $i_0 \in I$ so dass A_{i_0} kompakt ist.
Ferner sei $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \emptyset$.
Beweisen Sie, dass es eine endliche Menge $S \subset I$ gibt so dass $\bigcap\limits_{i \in S} A_i = \emptyset$.

6. Wir betrachten in dieser Aufgabe die normierten Vektorräume $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Sei $\emptyset \neq D \subset X$, sowie $f\colon D \to Y$. Beweisen oder Widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Ist $D = X$ und f linear, dann ist f stetig.

(ii) Ist D kompakt und f stetig, so ist $f(D)$ kompakt.

(iii) Ist f stetig und $f(D)$ nicht zusammenhängend, so ist D nicht zusammenhängend.

(iv) Ist f stetig und nicht konstant und D offen, so ist auch $f(D)$ offen.

(v) Ist $X = \mathbb{R}^n$ und wird D von endlich vielen Kuglen mit Radius 1 überdeckt, so ist $\overline{D}$ kompakt.

7. Es seinen $m, d \in \mathbb{N}$ und $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt. Zeigen Sie, dass $f\colon K \to \mathbb{R}^d$ genau dann stetig ist, wenn $\{(x, f(x)) | x \in K\}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^{m+d}$ ist.

8. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $(M, \tilde{d})$, wobei $\tilde{d}(x, y) := \lambda d(x, y)$ für $x, y \in M$, ein metrischer Raum ist.

9. Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^5}(z - (5 + i))^{3n}$

(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (z - 1)^{n!}$

(iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n} z^n$

10. Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:
$A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ist genau dann kompakt, wenn $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ kompakt sind.

11. Überprüfen Sie die folgende Funktionenfolge auf punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R},\ f_n = \begin{cases} \cos(x) & x \in [0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

12. Welche der folgenden Mengen sind offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt, konvex bzw. zusammenhängend?

(i) $A = \{(x, y, z); \mathrm{e}^y z^2 + 3 < 8\} \subset \mathbb{R}^3$

(ii) $B = \{(x, y, z); \mathrm{e}^y z^2 + 3 \leq 6 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 10\} \subset \mathbb{R}^3$

(iii) $\{a + b;\ a \in A \text{ und } b \in B\}$, wobei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex sei.

(iv) $\Pi_{x_1}(B_1(0))$, wobei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ ist und $\Pi_{x_i}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, ..., x_n) \mapsto x_i$ die Projektion auf die i-te Koordinate.

13. Zeigen Sie die folgende Aussage, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an:
Sei (M, d) ein metrischer Raum und $K_1, ..., K_n \subset M$ kompakt. Dann ist $\bigcup\limits_{k=1}^{n} K_i$ wieder kompakt.

14. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $K \subset M$ kompakt. Sei $f : K \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt, das heißt in jedem Punkt $x \in K$ gibt es eine offene Umgebung $K \supset U_x \ni x$ so dass $f|_{U_x}$ ist beschränkt.
Zeigen Sie: f ist beschränkt.

Schöne Feiertage und einen guten Rutsch ins neue Jahr!