Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 01

1. Zeigen Sie, dass für alle $x > -1$ und $\alpha \geq 1$ die Ungleichung (3)

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$$

gilt. *Hinweis: Taylorentwicklung.*

2. Seien $a, b > 0$ und $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie: (2)

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Hinweis: Zeigen und Verwenden Sie die Konvexität der Exponentialfunktion.

3. Ist die stückweise definierte Funktion (3,5)

$$f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin(x)} \ln\left(\frac{\exp(x)-1}{x}\right) & : 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{3} & : x = 0 \end{cases}$$

stetig auf ihrem Definitionsbereich $[0, \frac{\pi}{2})$? Falls nicht, bestimmen Sie das maximale Intervall auf dem sie stetig ist.

4. Sei $D \neq \emptyset$ eine Menge. Für Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ definieren wir $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|\colon x \in D\}$. Wir betrachten die Menge $\ell^\infty(D; \mathbb{R}) := \{f\colon D \to \mathbb{R}\colon \|f\|_\infty < \infty\}$, diese ist zusammen mit der

- Addition $(f+g)\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x)$ und
- der Skalarmultiplikation $\lambda f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lambda f(x)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$

ein reeller Vektorraum.

(i) Zeigen Sie: $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, falls $f \in \ell^\infty(D; \mathbb{R})$. (1)

(ii) Es seien $f_n, f \in \ell^\infty(D; \mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass f_n genau dann gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn gilt: $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$. (1,5)

5. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wird die Funktion $f_n\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. (2)
Konvergiert diese Funktionenfolge gleichmäßig? Falls nicht, konvergiert sie punktweise?

6. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion $f_n(x) = \arctan(nx)$ auf $\mathbb{R}$. Konvergiert diese Funktionenfolge punktweise? Falls ja, ist die Konvergenz auch gleichmäßig? (2)

7. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Jede konvexe und nach unten beschränkte Funktion nimmt ihr Infimum an. (1)

Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebige Folgen reeller Funktionen.

(ii) Konvergieren die Funktionenfolgen f_n und g_n punktweise auf $\mathbb{R}$, dann konvergiert auch das Produkt $(fg)_n(x) := f_n(x)g_n(x)$ punktweise. (1)

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := \frac{x}{n^2}\exp(-\frac{x}{n})$.

(iii) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion. (2)

(iv) Es gilt (1)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Die weiteren Informationen gehören zur Bonusaufgabe und sind für die vorherigen Aufgaben nicht relevant. Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex, dann gilt die folgende Ungleichung. Für alle $x_1, \xi, x_2 \in I$ mit $x_1 < \xi < x_2$ ist:

$$\frac{f(\xi) - f(x_1)}{\xi - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(\xi)}{x_2 - \xi}$$

Diese Aussage dürfen sie ohne Beweis verwenden. Zur Erinnerung: eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz stetig, falls ein $L > 0$ existiert, sodass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \text{ für alle } x, y \in (a,b) \text{ gilt.}$$

8. Wir möchten in dieser Aufgabe zeigen, dass jede konvexe Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig ist. (4*)

(i) Es seien $a < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_1 < \beta_2 < b$. Zeigen Sie:

$$\frac{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} \leq \frac{f(\beta_2) - f(\beta_1)}{\beta_2 - \beta_1}.$$

(ii) Sei $I \subset (a,b)$ ein abgeschlossenes Teilintervall. Zeigen Sie, dass f in I Lipschitz stetig ist.

(iii) Zeigen Sie, dass eine Lipschitz stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, I abgeschlossenes Intervall, bereits gleichmäßig stetig ist.

Insbesondere ist damit f stetig auf (a,b).

(iv) Gilt die Aussage auch, falls wir an Stelle von (a,b) ein beliebiges Intervall I betrachten?