Advanced Topics in the Calculus of Variations: Blatt 1

6. Konvexität II. Konvexität ist für die Theorie der Variationsrechnung äußerst hilfreich. Insbesondere hilft sie dabei, die schwache Unterhalbstetigkeit von Funktionalen nachzuprüfen, siehe Theorem 3 der Vorlesung.

(a) [=Aufg 1.(a)] Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ konvex. Zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt, dass

$$f(x) - f(y) \geq \nabla f(y) \cdot (x - y) \tag{1}$$

Folgere, dass jeder stationäre Punkt einer konvexen C^1-Funktion eine globale Minimumsstelle ist.

(b) Es sei $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ strikt konvex. Zeige: $\mathcal{F}$ hat höchstens eine globale Minimumsstelle.

7. Schwache Unterhalbstetigkeit II.
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die schwache Unterhalbstetigkeit für die direkte Methode wichtig ist. Ein Problem ist, dass es schwierig ist, sie in konkreten Fällen zu überprüfen. Wir haben aber in der Vorlesung Theorem 3 gesehen, welches wir hier vollends auch für Funktionale in $W^{1,p}$ für $p \neq \infty$ beweisen wollen.

(a) [=Aufg. 2(a)] Es sei $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gegeben. Zeige, dass $\mathcal{F}$ genau dann schwach unterhalbstetig ist, wenn für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \in X : \mathcal{F}(x) \leq \alpha\}$ schwach folgenabgeschlossen ist.

(b) [= Aufg. 2(b)] Es sei $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ('stark') unterhalbstetig und konvex. Zeige, dass $\mathcal{F}$ dann auch schwach unterhalbstetig ist.

(c) [= Aufg. 2(c)] Gib ein Beispiel eines Banachraumes X und eines unterhalbstetigen Funktionales $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, welches nicht schwach unterhalbstetig ist.

(d) Es sei $F \in C^0(\mathbb{R}^d)$ konvex derart, dass $F \geq 0$. Sei Ω wie in der Vorlesung und $1 \leq p \leq \infty$. Wir definieren $\mathcal{F} : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ durch

$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega F(Du)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Zeige, dass F schwach unterhalbstetig ist. Überlege dir, warum man 'nichtnegativ' durch 'nach unten beschränkt' ersetzen kann.

(e) Konvexität ist in manchen Fällen nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig. Eine Vereinfachung dieses Resultates wollen wir hier sehen:

(i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch die eindeutige $1-$periodische Fortsetzung von

$$u(x) := \begin{cases} a & x \in [0, \lambda] \\ b & x \in [\lambda, 1] \end{cases}. \tag{3}$$

Sei $u_j \in L^1(0,1)$ gegeben durch $u_j(x) := u(jx)$. Zeige, dass $(u_j)_{j=1}^\infty$ schwach in $L^1(0,1)$ gegen die konstante Funktion $u_\infty(x) := \lambda a + (1-\lambda)b$ konvergiert.

(ii) Sei $F \in C^0(\mathbb{R})$ und sei $\mathcal{F} : L^1(0,1) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gegeben durch

$$\mathcal{F}[u] := \int_{(0,1)} F(u(x))\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

Zeige: Ist $\mathcal{F}$ schwach unterhalbstetig in $L^1(0,1)$, so ist F konvex.

8. Der Satz von Riesz-Frechét. Im Folgenden lernen wir eine Anwendung der direkten Methode kennen: Ein variationeller Beweis des Satzes von Riesz-Frechét.

(a) [= Aufg. 4(b)] Es sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum und $h^* \in H^*$ ein Element des Dualraumes. Zeige, dass das Funktional $\mathcal{F} : H \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\mathcal{F}[u] := \frac{1}{2}||u||^2 - h^*(u)$ einen globalen Minimierer besitzt.

(b) [= Aufg. 4(c)] Verwende deine Erkenntnisse aus Teilaufgabe (a) um den Darstellungssatz von Riesz-Frechét zu zeigen. Zur Erinnerung:
Satz (Satz von Riesz-Frechét) *Es sei H ein Hilbertraum und $h^* \in H^*$ ein Element des Dualraumes. Dann gibt es $x \in H$ derart, dass $h^*(v) = (x, v)$ für alle $v \in H$.*

(c) BONUSAUFGABE: Nicht nur des Satz von Riesz-Frechét lässt sich mit variationellen Methoden beweisen. Überlege Dir, wie man die Existenz des bedingten Erwartungswertes mit variationellen Methoden zeigen könnte.

9. Lipschitzfunktionen.
Ist der Rand eines Gebietes glatt genug, so stimmt der Raum $W^{1,\infty}(\Omega)$ mit dem Banachraum der Lipschitzfunktionen $\mathrm{Lip}(\Omega)$ überein. In der Vorlesung haben wir bereits ein Beispiel einer $W^{1,\infty}(\Omega)-$Funktion gesehen, die nicht Lipschitz ist. Hier wollen wir zeigen, dass für allgemeine Gebiete stets noch gilt, dass $\mathrm{Lip}(\Omega) \subset W^{1,\infty}(\Omega)$. Es sei für diese Aufgabe $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

(a) Sei $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d)$. Zeige: Die Einschränkung von f auf Ω liegt in $W^{1,\infty}(\Omega)$.
Hinweis: Einen Hinweis für die Aufgabe kannst Du auf der letzten Seite des Blattes bekommen, falls benötigt.

(b) Es sei $f \in \mathrm{Lip}(\Omega)$ und es sei L eine Lipschitzkosntante von f. Definiere für $y \in \mathbb{R}^d$

$$\overline{f}(y) := \inf_{x\in\Omega} \{f(x) + L|y - x|\}. \tag{5}$$

Zeige dass $\overline{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine wohldefinierte, Lipschitzstetige Funktion auf $\mathbb{R}^d$ ist, die auf Ω stets mit f übereinstimmt. Folgere mit Aufgabenteil (a), dass $\mathrm{Lip}(\Omega) \subset W^{1,\infty}(\Omega)$. Führe dir nochmal vor Augen, warum Gleichheit im Allgemeinen nicht gilt.

10. Distributionen und schwache Ableitungen.
In der Vorlesung haben wir einige Eigenschaften klassischer differenzierbarer Funktionen auch für schwach differenzierbare Funktionen und gar für Distributionen benutzt. In dieser Aufgabe wollen wir uns überlegen, was für Subtilitäten hierbei auftreten können und wie man sie auflösen kann

(a) Zeige die schwache Formulierung des notwendigen Poincaré Kriteriums, d.h. folgendes: Es sei $v \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Zeige: Gibt es ein $w \in W^{1,1}_{loc}(\Omega; \mathbb{R})$ sodass $Dw = v$, so gilt für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $i, j \in \{1, ..., n\}$, dass

$$\int_\Omega v^i \partial_j \phi dx = \int_\Omega v^j \partial_i \phi dx. \tag{6}$$

(b) Wie man aus Analysis 2 weiß ist das klassische Poincaré Theorem für einfach zusammenhängende Ω auch hinreichend. Hier wollen wir auch zeigen, dass die schwache Formulierung für schöne Gebiete Ω hinreichend ist. Aus technischen Gründen beschränken wir uns auf $\Omega = B_1(0)$. Sei also $\Omega = B_1(0)$ und $v \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ so, dass für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $i, j \in \{1, ..., d\}$ gilt, dass

$$\int_\Omega v^i \partial_j \phi dx = \int_\Omega v^j \partial_i \phi dx. \tag{7}$$

Zeige: Dann gibt es $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ sodass $Du = v$.

(c) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ offen, $p \in [1, \infty)$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Für $e \in \mathbb{R}$ setze $\Omega_e := \{(x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} : (e, x_2, ..., x_d) \in \Omega\}$. Zeige: Für Lebesgue-fast alle $e \in \mathbb{R}$ sodass $\Omega_e \neq \emptyset$ liegt die Abbildung $\Omega_e \ni (x_2, ..., x_d) \mapsto u(e, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}$ in $W^{1,p}(\Omega_e)$

11. Der Beweis von Theorem 5. Rechtfertige die OBDA-Annahmen vom Beweis von Theorem 5 (i) und (ii). Wie genau ist die Verwendung des Satzes von Schwarz in dem Beweis von Teil (i) zu verstehen? Schreibe Dir die einzelnen Schritte mithilfe von Testfunktionen genau aus und rechtfertige die Vertauschung.

12. Shock-Wellen und das Rankine-Hugonoit Erhaltungsgesetz. (BONUSAUFGABE) Es seien $F, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt. Wir betrachten im Folgenden die *Burgers Schockwellen-Gleichung*

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ u(t=0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{8}$$

Wir sagen eine Funktion $u \in L^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R})$ ist eine *Integrallösung* falls für alle $v \in C_c^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R})$ (kein Schreibfehler: Funktionen mit Träger bei $t = 0$ sind zugelassen!) gilt

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u\partial_t v + F(u)\partial_x v) \, dt \, dx = -\int_{-\infty}^\infty g(x)v(0,x) \, dx \tag{9}$$

(a) Nimm nun an, dass $(0,\infty) \times \mathbb{R} = V_r \cup C \cup V_l$ für offene, C^1-berandete, zusammenhängende, disjunkte Mengen V_r und V_l und eine C^1-Kurve C, deren Normale wir mit ν_C bezeichnen. Nimm nun an es gibt eine Integrallösung u mit der folgenden Eigenschaft: $u \in C^1(\overline{V_l}) \cup C^1(\overline{V_r})$ in dem Sinne, dass $u_{|V_l}$ und seine Ableitung stetige Fortsetzung auf ∂V_l besitzt, die wir mit u_l bezeichnen. Analoges gilt für $u_{|V_r}$ und die Fortsetzung bezeichnen wir mit u_r. Beachte, dass auf $C = \partial V_r = \partial V_l$ die Funktionen u_r und u_l nicht übereinstimmen müssen (in einem solchen Fall sprechen wir von einem *Schock*.) Zeige, dass auf der gesamten Schock-Kurve C gelten muss

$$\begin{pmatrix} u_l - u_r \\ F(u_l) - F(u_r) \end{pmatrix} \cdot \nu_C = 0 \tag{10}$$

(b) Folgere: Ist $C = \{(t, s(t)) : t > 0\}$ für eine glatte Funktion $s : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Zeige, dass dann gilt

$$F(u_l(t,s(t))) - F(u_r(t,s(t))) = s'(t)(u_l(t,s(t)) - u_r(t,s(t))) \quad \forall t > 0. \tag{11}$$

(c) Jetzt müssen wir natürlich eigentlich noch klären, ob im Allgemeinen überhaupt solche Schocks auftreten und ob es tatsächlich Lösungen gibt, die die Struktur haben, die in Teilaufgabe (a) postuliert wird. Zeige: Es sei $s(t) = \alpha t$ und $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $F(b) - F(a) = \alpha(b - a)$. Dann ist

$$u(t,x) = \begin{cases} a & x < s(t) \\ b & x > s(t) \end{cases} \tag{12}$$

eine Integrallösung.

(d) Für solche Gleichungen verwendet man häufig die sogenannte *Methode der Charakteristiken*, siehe Kapitel 3 im PDE-Buch von Evans. Diese liefert folgendes: Jedes $u \in C^1((0,\infty) \times \mathbb{R})$ welches die Fixpunktgleichung

$$u(t,x) = g(x - tF'(u(t,x))) \qquad (x,t) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \tag{13}$$

löst, ist eine klassische Lösung im Sinne von (8). Zeige dies durch explizites Nachrechnen. Wie können mithilfe einer solchen Gleichung Aussagen über die Glattheit von u getroffen werden ?

Hinweise: *Hinweis zu Aufgabe 9(a):* Definiere für $j = 1, ..., d$ die Abbildung $T : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$T\phi := \int_\Omega u(x)\partial_{x_j}\phi(x)dx. \tag{14}$$

Zeige mit Methoden aus der Funktionalanalysis, dass T sich auf eindeutige Weise zu einem Operator aus $L^1(\Omega)^*$ fortsetzen lässt. Was weißt du aus der Funktionalanalysis über $L^1(\Omega)^*$?