Universität Ulm

Besprechung: Freitag, 18.10.2019

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2019/20
Punktzahl: keine

Advanced Topics in the Calculus of Variations: Blatt 0

1. Konvexität.

In der Vorlesung wurde bereits mehrfach angesprochen, dass die Konvexität eines Funktionals für die Theorie sehr hilfreich ist. Wir befassen uns in dieser Aufgabe mit Charakterisierungen konvexer Funktionen und damit, warum die Konvexität so hilfreich sein könnte. In der Variationsrechnung verwenden wir die klassische Definition von Konvexität, d.h.

Definition *Sei X ein Vektorraum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt* KONVEX *falls für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt, dass*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \tag{1}$$

(a) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ konvex. Zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass

$$f(x) - f(y) \geq \nabla f(y) \cdot (x - y) \tag{2}$$

Folgere, dass jeder stationäre Punkt einer konvexen C^1-Funktion eine globale Minimumsstelle ist.

(b) Nicht nur die Konvexität von Funktionen ist ein interessantes Konzept, sondern auch die Konvexität von Mengen bringt Erstaunliches hervor:
Lemma: (Lemma von Mazur) *Es sei X ein Banachraum und $A \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann ist A auch schwach folgenabgeschlossen.*
Vergewissere Dich zunächst, dass Du dieses kennst und zeige durch ein Gegenbeispiel, dass auf die Konvexitätsannahme nicht verzichtet werden kann.

(c) In der Herleitung der Direkten Methode haben wir mit der Menge $W_g^{1,p} := \{u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) : u_{|\partial\Omega} = g\}$ für ein $g \in L^p(\partial\Omega; \mathbb{R}^m)$ gearbeitet. In dem Beweis der direkten Methode haben wir benötigt, dass $W_g^{1,p}$ schwach folgenabgeschlossen ist. Warum ist das so? (Hier gibt es mehrere Möglichkeiten)

2. Schwache Unterhalbstetigkeit.

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass wir für die direkte Methode die schwache Unterhalbstetigkeit eines Funktionales voraussetzen müssen. Diese wollen wir hier genauer untersuchen. Sei hierfür X ein beliebiger Banachraum.

(a) Es sei $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gegeben. Zeige, dass $\mathcal{F}$ genau dann schwach unterhalbstetig ist, wenn für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \in X : \mathcal{F}(x) \leq \alpha\}$ schwach folgen-abgeschlossen ist.

(b) Es sei $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ('stark') unterhalbstetig und konvex. Zeige, dass $\mathcal{F}$ dann auch schwach unterhalbstetig ist. Betrachte noch einmal Theorem 3 aus der Vorlesung und vergleiche.

(c) Gebe ein Beispiel eines Banachraumes X und eines unterhalbstetigen Funktionales $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, welches nicht schwach unterhalbstetig ist.

3. Reflexivität und schwache Konvergenz.

Für die direkte Methode wird folgende Aussage entscheidend benötigt: In reflexiven Banachräumen sind beschränkte Mengen schwach folgenkompakt. Arbeitet man in nicht-reflexiven Banachräumen, so muss man sich diese Kompaktheit auf andere Weise beschaffen. Auch dies wollen wir hier üben.

(a) Gib für $X = L^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ und $X = \ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{R})$ jeweils eine beschränkte Folge an, die keine schwach konvergente Teilfolge hat.

(b) Wir definieren für $g \in L^1(\Omega; \mathbb{R})$ die Menge $W_g^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}) := \{u \in W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}) : u_{|\partial\Omega} = g\}$ und nehmen an, dass diese nicht leer ist. Das Funktional $\mathcal{F} : W_g^{1,1} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$\mathcal{F}[u] := \begin{cases} \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \log(1 + |\nabla u|^2)\, dx & \text{falls das Integral endlich ist} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3}$$

Zeige, dass $\mathcal{F}$ einen globalen Minimierer hat.

(c) BONUSAUFGABE: Wir wollen hier Aufgabe 3(c) noch ein wenig verbessern. In der Vorlesung wurde bereits das Konzept der gleichmäßigen Konvexität angesprochen:
Definition: *Ein Banachraum X heißt* GLEICHMÄSSIG KONVEX, *falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass*

$$\left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| > 1 - \delta \quad \Rightarrow \quad ||x-y|| < \epsilon. \tag{4}$$

Zeige nun, dass es in jedem unendlichdimensionalen gleichmäßig konvexen Banachraum ein Funktional gibt, welches unterhalbstetig aber nicht schwach unterhalbstetig ist.
Hinweis: Hilfreich könnte der Satz von Milman sein, der besagt, dass gleichmäßig konvexe Banachräume stets reflexiv sind.

4. Die Euler-Lagrange-Gleichung. Die Euler-Lagrange-Gleichung übersetzt ein Variationsproblem in ein PDE-Problem. Damit das Problem tatsächlich einfacher wird, muss diese PDE jedoch gutartig sein. Wie in der Vorlesung angekündigt, garantiert die strikte Konvexität von des Funktionals die Elliptizität der Euler-Lagrange-Gleichung.

(a) Sei $F \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ und $\mathcal{F} : \{u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}) : u_{|\partial\Omega} = g\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega F(Du) \, \mathrm{d}x. \tag{5}$$

Dies ist die Situation aus der Vorlesung mit $m = 1$ und einem simpleren F. Zeige: Die Euler-Lagrange-Gleichung von $\mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$D^2F(Du) : D^2u = 0, \tag{6}$$

wobei hier die Notation aus der Vorlesung $A : B := \mathrm{Spur}(A^T B)$ verwendet wurde. **Hinweis:** Die hier verwendete Definition von 'Elliptisch' entspricht der auf Wikipedia, siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Elliptische_partielle_Differentialgleichung`.

(b) Es sei $(H, (\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum und $h^* \in H^*$ ein Element des Dualraumes. Zeige, dass das Funktional $\mathcal{F} : H \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\mathcal{F}[u] := \frac{1}{2}||u||^2 - h^*(u)$ einen globalen Minimierer besitzt.

(c) Verwende deine Erkenntnisse aus Teilaufgabe (a) um den Darstellungssatz von Riesz-Frechét zu zeigen. Zur Erinnerung:
Satz (Satz von Riesz-Frechét) *Es sei H ein Hilbertraum und $h^* \in H^*$ ein Element des Dualraumes. Dann gibt es $x \in H$ derart, dass $h^*(v) = (x, v)$ für alle $v \in H$.*

5. Das Hauptlemma der Variationsrechnung.
Wie in der Vorlesung erwähnt gibt es die Euler-Lagrange Gleichung in Differential -und Integralform. Um von der einen Form auf die Andere zu kommen haben wir am Ende der Herleitung folgende Aussage benutzt:
Lemma: *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{R})$ derart, dass*

$$\int_\Omega f(x)\eta(x) \, \mathrm{d}x = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}).$$

Dann gilt $f \equiv 0$ Lebesgue-fast überall.
Überlegt euch, wie man eine solche Aussage beweisen könnte. Etwas einfachere Vorstufe: Man kann zusätzlich annehmen, dass $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$.