Universität Ulm

Mittwoch, 23.10.2019

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2019/20

Advanced Topics in the Calculus of Variations: Zusatzmaterial 1

In der Vorlesung wurde der Beweis des folgenden Resultates skizziert:

Proposition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ glatt berandet und konvex. Sei zusätzlich $K \subset \mathbb{R}^{m\times d}$ kompakt. Besitzt die Differentialinklusion $Du \in K$ f.ü. mit Randwerten $u_{|\partial\Omega} = Fx$ eine approximative Lösung $(u_j)_{j=1}^\infty$, so gilt

$$F \in K^{co} := \bigcap_{C \supset K \text{ kompakt, konvex}} C. \tag{1}$$

Beweis: Sei $(u_j)_{j=1}^\infty$ eine approximative Lösung. Zunächst stellen wir fest, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$F = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega Du_j(x)dx. \tag{2}$$

In der Tat hat man mit dem Satz von Gauß

$$\int_\Omega Du_j(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}(u_j \otimes N)dS(x) = \int_{\partial\Omega}(Fx\otimes N)dS(x) = \int_\Omega D(Fx)\,\mathrm{d}x = F|\Omega|, \tag{3}$$

woraus man Gleichung (2) folgern kann.
Wären die $Du_j(x)$ nun tatsächlich Elemente von K, so würde gleich aus (2) folgen, dass $F \in K^{co}$, denn ein normiertes Integral kann als Grenzfall einer Konvexkombination verstanden werden. (Diesen Schritt klären wir nochmal im nachstehenden Lemma).
Da die Du_j jedoch nur 'approximativ' Elemente von K sind, müssen wir noch argumentieren. Hierfür weisen wir zunächst nach, dass (Du_j) in $L^1(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d})$ eine schwach konvergente Teilfolge hat.
Hierzu zeigen wir, dass $(Du_j)_{j=1}^\infty$ gleichgradig integrierbar ist und verwenden dann den Satz von Dunford-Pettis aus der Vorlesung. Aus der Definition einer approximativen Lösung folgt

$$\mathrm{dist}(Du_j, K) \to 0 \quad \text{in } L^1(\Omega). \tag{4}$$

Nach der 'Umkehrung des Satzes von Lebesgue' (siehe Theorem 4.9 im Buch von Haim Brezis "Functional Analysis, Sobolev Spaces, ...") gibt es eine Teilfolge, die wir nicht neu indizieren, und eine Funktion $g \in L^1(\Omega)$ derart, dass $\mathrm{dist}(Du_j, K)$ fast überall gegen 0 konvergiert und auch gilt, dass $\mathrm{dist}(Du_j, K) \le |g|$ Lebesgue fast überall. Wir definieren nun $||K||_\infty := \sup\{||z|| : z \in K\}$, welches einen endlichen Wert annimmt, da K kompakt ist. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir Lebesgue-fast überall folgende Abschätzung:

$$|Du_j(x)| \le \mathrm{dist}(Du_j(x), K) + ||K||_\infty \le |g(x)| + ||K||_\infty =: h. \tag{5}$$

Mit der oben getroffenen Definition sieh man, dass $h \in L^1(\Omega)$. Wir haben nachgewiesen, dass $\sup_{j\in\mathbb{N}} |Du_j| \le h$ Lebesgue-fast überall für eine integrierbare Funktion h. Insbesondere gilt für alle $M > 0$ und $j \in \mathbb{N}$, dass bis auf Nullmengen $\{|Du_j| > M\} \subset \{h > M\}$. Für die gleichgradige Integrierbarkeit der (Du_j) beobachten wir nun unter Verwendung von (5)

$$\limsup_{M\to\infty}\sup_{j\in\mathbb{N}}\int_{|Du_j|>M}|Du_j(x)|\,\mathrm{d}x \le \limsup_{M\to\infty}\sup_{j\in\mathbb{N}}\int_{h>M}|Du_j(x)|\,\mathrm{d}x \le \limsup_{M\to\infty}\int_{h>M} h(x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{6}$$

wobei wir in der letzten Gleichung den Satz von Lebesgue benutzt haben. Es folgt die gleichgradige Integrierbarkeit von $(Du_j)_{j=1}^\infty$ und damit gibt es ein $v \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d})$ derart, dass nach Auswahl einer Teilfolge $Du_j \rightharpoonup v$ in $L^1(\Omega)$. Mit der Defintion der schwachen Konvergenz sieht man leicht, dass sich Gleichung (2) in den Grenzwert überträgt, d.h. es gilt

$$F = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Wir zeigen nun, dass $v(x) \in K$ für Lebesgue-fast alle x. Hierzu definieren wir folgendes Funktional $\mathcal{F} : L^1(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d}) \to \mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{F}[w] := \int_\Omega \operatorname{dist}(w(x), K)\, \mathrm{d}x. \tag{8}$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{F}$ schwach unterhalbstetig ist. Nach Übungsaufgabe 2.(b) bzw. 7.(b) genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ konvex und unterhalbstetig ist. Die Konvexität erbt sich von der Konvexität der Distanzfunktion und da diese sogar Lipschitzstetig ist, ist $\mathcal{F}$ auch Lipschitzstetig, wie eine weitere leichte Rechnung zeigen würde. Damit ist die schwache Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{F}$ nachgewiesen und man hat für das vorhin konstruierte v

$$\mathcal{F}[v] \le \liminf_{j\to\infty} \mathcal{F}[Du_j] = \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega \operatorname{dist}(Du_j(x), K)\, \mathrm{d}x = 0, \tag{9}$$

wegen der Definition einer approximativen Lösung. Daher gilt $\mathcal{F}[v] = 0$ und deshalb, wegen der Definition von $\mathcal{F}$, $\operatorname{dist}(v(x), K) = 0$ für Lebesgue-fast alle $x \in \Omega$. Da K kompakt ist folgt daraus, dass $v(x) \in K$ für Lebesgue-fast alle $x \in \Omega$. Mit Gleichung (7) und dem nachstehenden Lemma (angewandt für $C := K^{co}$) folgern wir die Behauptung. *QED*

Lemma: Es sei X ein Banachraum und $C \subset X$ abgeschlossen und konvex. Dann gilt für alle $v \in L^1(\Omega; X)$ mit $v(x) \in C$ für Lebesgue-fast alle $x \in \Omega$, dass

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v(x)\, \mathrm{d}x \in C. \tag{10}$$

Beweis. Angenommen, $a := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v(x)\, \mathrm{d}x \notin C$. Nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach gibt es dann $x^* \in X^*$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$x^*(a) < \gamma \le x^*(c) \quad \forall c \in C. \tag{11}$$

Nach den Rechenregeln für (Bochner-)Integrale gilt nun aber

$$x^*(a) = x^* \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v(x)\, \mathrm{d}x \right) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega x^*(v(x))\, \mathrm{d}x. \tag{12}$$

Da nun $v(x) \in C$ Lebesgue-fast überall, gilt $x^*(v(x)) \ge \gamma$ Lebesgue fast überall. Damit erhalten wir

$$x^*(a) \ge \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \gamma\, \mathrm{d}x = \gamma, \tag{13}$$

ein Widerspruch zu (11). Die Behauptung folgt. *QED*