Universität Ulm

Besprechung: Dienstag, 5.11.2019

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2019/20
Punktzahl: keine

Advanced Topics in the Calculus of Variations: Blatt 2

13. Der Raum der signierten Radonmaße.
In der Vorlesung haben wir gelernt, dass $M(\mathbb{R}^m) = C_0(\mathbb{R}^m)^*$. Dies ist besonders nützlich für die Variationsrechnung: $C_0(\mathbb{R}^m)$ ist separabel und daher sind beschränkte Mengen in $M(\mathbb{R}^m)$ schwach-*-folgenkompakt. In dieser Aufgabe wollen wir diese spezielle schwach-$*$-Topologie ein wenig untersuchen. Wir erinnern kurz an die Definition eines Radonmaßes und die Norm auf $M(\mathbb{R}^m)$.
Definition:[Totalvariation]. Es sei μ ein signiertes Borel-Maß auf $\mathbb{R}^m$. Dann definieren wir das *Totalvariationsmaß* von μ durch

$$|\mu|(B) := \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|\mu(B_n)| : (B_n)_{n=1}^{\infty} \text{ paarweise disjunkte Borelmengen so, dass } B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right\}.$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass $|\mu|$ ein Borel-Maß ist.
Definition:[Radonmaß] Ein Borel-Maß heißt *Radonmaß*, falls es jeder kompakten Menge einen endlichen Wert zuordnet. Ein signiertes Maß heißt *signiertes Radonmaß*, falls seine Totalvariation ein Radonmaß ist.
Proposition: Die Menge $M(\mathbb{R}^m)$ aller signierten Radonmaße mit endlichem Totalvariationsmaß bildet einen Banachraum mit der Norm

$$||\mu||_{M(\mathbb{R}^m)} := |\mu|(\mathbb{R}^m).$$

Dieser ist isometrisch isomorph zu $C_0(\mathbb{R}^m)^*$ durch den Isomorphismus

$$I : M(\mathbb{R}^m) \to C_0(\mathbb{R}^m)^*,\ \mu \mapsto I(\mu),$$

wobei

$$I(\mu)(f) := \int f \,\mathrm{d}\mu \quad (f \in C_0(\mathbb{R}^m)).$$

(a) Zeige: $L^1(\mathbb{R}^m)$ ist schwach$-*$-dicht in $M(\mathbb{R}^m)$, d.h. für jedes $\mu \in M(\mathbb{R}^m)$ gibt es eine Folge $(g_n) \subset L^1(\mathbb{R}^m)$ derart, dass die Folge der assoziierten Steltjes-Maße $(g_n \,\mathrm{d}x)_{n=1}^{\infty}$ schwach$-*$ in $M(\mathbb{R}^m) = C_0(\mathbb{R}^m)^*$ gegen μ konvergiert. Ist $L^1(\mathbb{R}^m)$ auch 'stark' dicht in $M(\mathbb{R}^m)$?

(b) Es konvergiere eine Folge nichtnegativer Maße $(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subset M(\mathbb{R}^m)$ schwach$-*$ gegen ein Maß μ. Zeige:

  (i) Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ gilt $\mu(U) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(U)$. Gebe ein Gegenbeispiel für Gleichheit.

  (ii) Für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^m$ gilt $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) \leq \mu(K)$. Gilt eine analoge Aussage auch für abgeschlossene Mengen?

(c) Ist die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße $P(\mathbb{R}^m)$ schwach$-*$-abgeschlossen?

(d) Ist die Menge aller endlichen Maße, d.h. die Menge aller endlichen signierten Maße die jeder Menge nichtnegative Werte zuordnet, schwach$-*$ folgenabgeschlossen?

(e) Gibt es eigentlich ein Analogon zum 'Lemma von Mazur' (siehe Aufgabe 1(b)) für die schwach$-*$ Topologie?

(f) Es sei $f \in C(\mathbb{R}^m)$ eine nichtnegative Funktion und $(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subset M(\mathbb{R}^m)$ eine Folge nichtnegativer Maße mit $\mu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$. Dann gilt

$$\int f \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f \,\mathrm{d}\mu_n. \tag{1}$$

(g) Ist $M(\mathbb{R}^m)$ separabel? Ist $M(\mathbb{R}^m)$ reflexiv?

14. Young-Maße. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen (Beschränktheit setzen wir nicht voraus). In der Vorlesung haben wir die Young-Maße untersucht, deren Eigenschaften wir hier genauer studieren wollen.

(a) Zeige: $x \mapsto \delta_x$ ist ein Young-Maß, wobei δ_x das Dirac-Maß mit Punktmasse 1 bei x bezeichnet. Zeige zusätzlich: Das gegebene Young-Maß ist genau dann von einer beschränkten Folge in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$ generiert, falls

$$\int_\Omega |x|^p \,\mathrm{d}x < \infty \tag{2}$$

(b) Es sei $x \mapsto \mu_x$ ein Young-Maß. Zeige: Für alle Borel-Mengen A ist die Abbildung

$$\Omega \ni x \mapsto \mu_x(A) \in \mathbb{R} \tag{3}$$

messbar.

(c) Angenommen $(z_j) \subset L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ ist eine beschränkte Folge und $z_j \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{z}$ in $L^\infty(\Omega)$. Ferner generiere $(z_j)_{j=1}^\infty$ ein Young-Maß $x \mapsto \mu_x$. Zeige, dass

$$\overline{z}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} z \,\mathrm{d}\mu_x(z) \quad \text{f.a. } x \in \Omega. \tag{4}$$

15. Der Beweis von Theorem 10. Der Fundamentalsatz für Young-Maße ist ein zentraler Beweis, für den wir hier zunächst einige Details auffüllen wollen. Später

(a) Es sei $g \in L^1(\Omega;\mathbb{R})$. Zeige: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass

$$E \text{ Lebesgue-messbar mit } |E| < \delta \;\Rightarrow \int_E |g(x)| \,\mathrm{d}x < \epsilon. \tag{5}$$

16. Distributionen und schwache Ableitungen II.

In der Vorlesung haben wir einige Eigenschaften klassischer differenzierbarer Funktionen auch für schwach differenzierbare Funktionen und gar für Distributionen benutzt. In dieser Aufgabe wollen wir uns überlegen, was für Subtilitäten hierbei auftreten können und wie man sie auflösen kann

(a) [= Aufg 10 (a)] Zeige die schwache Formulierung des notwendigen Poincaré Kriteriums, d.h. folgendes: Es sei $v \in L^1_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Zeige: Gibt es ein $w \in W^{1,1}_{loc}(\Omega;\mathbb{R})$ sodass $Dw = v$, so gilt für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $i,j \in \{1,...,n\}$, dass

$$\int_\Omega v^i \partial_j \phi dx = \int_\Omega v^j \partial_i \phi dx. \tag{6}$$

(b) [$\simeq$ Aufg.10 (b), mit kleiner Änderung] Wie man aus Analysis 2 weiß ist das klassische Poincaré Theorem für einfach zusammenhängende Ω auch hinreichend. Hier wollen wir auch zeigen, dass die schwache Formulierung für schöne Gebiete Ω hinreichend ist. Aus technischen Gründen beschränken wir uns auf $\Omega = B_1(0)$. Sei also $\Omega = B_1(0)$ und $v \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ so, dass für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $i,j \in \{1,...,d\}$ gilt, dass

$$\int_\Omega v^i \partial_j \phi dx = \int_\Omega v^j \partial_i \phi dx. \tag{7}$$

Zeige: Dann gibt es $u \in L^1(\Omega)$ sodass $Du = v$.