UNIVERSITÄT ULM

Besprechung: Freitag, 8.11.2019

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2019/20
Punktzahl: keine

Advanced Topics in the Calculus of Variations: Blatt 3

17. Young-Maße II.

(a) Es sei $(u_j)_{j=1}^\infty$ eine in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$ konvergente Folge mit Grenzwert $u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Welches Young-Maß generiert $(u_j)_{j=1}^\infty$. Beweise deine Behauptung.

(b) Es sei $(z_j)_{j=1}^\infty \subset L^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ eine Dirac-Folge, d.h. $z_j = j^d \cdot z(jx)$ für eine nichtnegative Funktion $z \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\int_{\mathbb{R}^d} z = 1$. Zeige: $(z_j)_{j=1}^\infty$ generiert das Young-Maß $\mu_x(A) = \delta_0$ für f.a. $x \in \mathbb{R}^d$, $A \subset \mathbb{R}^m$ Borel.

(c) Zeige, dass Proposition 11 sich nicht auf den Fall $p = 1$ verallgemeinern lässt.

18. Laminate.

Hier wollen wir die in der Vorlesung definierten Laminate untersuchen. Durch Laminate endlicher Ordnung kennen wir bereits einige explizite Beispiele für Laminate.

(a) Es seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Zeige, dass $\nu := \frac{1}{2}\delta_{A_1} + \frac{1}{2}\delta_{A_2}$ kein Laminat ist.

(b) Es seien $\mu, \nu \in P^{rc}(\mathbb{R}^{m\times d})$ Laminate mit der Eigenschaft, dass $rk(\overline{\nu} - \overline{\mu}) \leq 1$. Zeige: Für alle $\lambda \in (0,1)$ ist $\lambda\mu + (1-\lambda)\nu$ ein Laminat. Kann auf die Vorraussetzung $rk(\overline{\nu} - \overline{\mu}) \leq 1$ verzichtet werden ?

(c) Es sei $O \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und seien $\mu, \nu \in \mathcal{L}(O)$ Laminate endlicher Ordnung mit der Eigenschaft, dass $rk(\overline{\nu} - \overline{\mu}) \leq 1$. Zeige: Für alle $\lambda \in (0,1)$ ist $\lambda\mu + (1-\lambda)\nu$ ein Laminat endlicher Ordnung.

(d) Gib ein Beispiel für ein Laminat $\nu \in P^{rc}(\mathbb{R}^{m\times d})$, welches kein Laminat endlicher Ordnung ist.

(e) Zeige folgenden Zusatz zu Lemma 15. Sei $O \subset \mathbb{R}^{m\times d}$ offen, konvex und beschränkt und $f : O \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt für alle $X \in O$

$$R_O f(X) = \inf\{\langle \nu, f\rangle \mid \nu \in P^{rc}(O) : \overline{\nu} = X\}. \tag{2}$$

19. Die Rang-1-konvexe Hülle . In der Vorlesung haben wir gesehen, was die Rang-1-konvexe Hülle einer Kompakten Menge K ist. Ihre Charakterisierung ist natürlich, wenn man Rang-1-konvexe Funktionen als gegebenes Konzept akzeptiert. Die Rang-1-konvexe Hülle einer offenen Menge haben wir impliziter konstruiert. Dadurch bleibt eine Subtilität:

(a) Es sei $O \subset \mathbb{R}^{m\times d}$ offen und O^{rc} definiert wie in Definition 13 der Vorlesung. Zeige: O^{rc} ist offen.

20. Rang-1-Konvexität. Im Laufe der Vorlesung werden wir mehrere Arten von abgeschwächter Konvexität für Matrizenwertige Funktionen kennen lernen. Diese Woche haben wir die Rang-1-Konvexität kennen gelernt mit der wir uns hier beschäftigen wollen.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ Rang-1-konvex und seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times d}$ sodass $\mathrm{rk}(B - A) = 1$. Zeige, für alle $\lambda \in (0,1)$ gilt

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B). \tag{3}$$

21. Young-Maße und unser nicht-konvexes Minimierungsproblem. Wir betrachten noch einmal das Funktional aus dem Beispiel am Ende des Kapitels zur Direkten Methode, d.h. $\mathcal{F} : W_0^{1,4}(-1,1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{F}[u] := \int_{-1}^{1} ((\partial_x u)^2 - 1)^2 + u^2 \, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Sei $(u_j) \subset W_0^{1,4}(-1,1)$ beliebig gewählt derart, dass $\lim_{j\to\infty} \mathcal{F}[u_j] = 0$ [$= \inf \mathcal{F}$]. In dieser Aufgabe untersuchen wir, welches Young-Maß von $(\partial_x u_j)_{j=1}^{\infty}$ generiert wird. Wer möchte kann diese Aufgabe freihändig versuchen. Allerdings gibt es auch auf der letzten Seite des Blattes eine Anleitung, die hilfreich sein könnte.

Anleitung zu Aufgabe 21: Zunächst ist es wichtig zu beobachten, dass $(\partial_x u_j)_{j=1}^{\infty}$ ein Young Maß $x \to \mu_x$ generiert dann und nur dann wenn jede Teilfolge der Folge eine Teilfolge besitzt, die dasselbe Maß $x \to \mu_x$ generiert. Nehmen wir nun an eine Teilfolge generiert ein Young-Maß $x \mapsto \mu_x$. Zeige mit Methoden aus der Vorlesung, dass $\operatorname{supp}(\mu_x) \subset \{-1, 1\}$ für fast alle $x \in (-1, 1)$. Da $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ kann man also schreiben

$$\mu_x = \lambda(x)\delta_1 + (1 - \lambda(x))\delta_{-1}, \tag{5}$$

für eine messbare nichtnegative Abbildung λ. Es muss noch gezeigt werden, dass $\lambda(x) = \frac{1}{2}$ fast überall. Verwende hierfür die Gleichung

$$u_j(a) = \int_0^a \partial_x u_j(x)dx \quad \forall a \in (-1, 1) \tag{6}$$

Die linke Seite geht für jedes a gegen Null (warum ?). Für die rechte Seite kann man mit der Konstruktion des Young-maßes arbeiten und sehen, dass die für $j \to \infty$ gegen $\int_0^a (1 - 2\lambda(x))dx$ konvergiert.