Prof. Dr. Emil Wiedemann
Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2019/20
Punktzahl: keine

Advanced Topics in the Calculus of Variations: Blatt 4

22. Laminate II.

(a) Sei $\mu \in \mathcal{P}^{rc}(K)$ ein Laminat mit Träger in einem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^{m\times d}$. Zeige, dass $\overline{\mu} \in K^{rc}$.

(b) Ist die Menge aller Laminate $\mathcal{P}^{rc}(\mathbb{R}^{m\times d})$ schwach-*-abgeschlossen?

(c) Es sei $K \subset \mathbb{R}^{m\times d}$ kompakt. Ist $\mathcal{P}^{rc}(K)$ schwach-*-abgeschlossen?

(d) [= Aufgabe 18 (e), mit kleiner Änderung] Zeige folgenden Zusatz zu Lemma 15. Sei $f : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt für alle $X \in \mathbb{R}^{m\times d}$

$$R_{\mathbb{R}^{m\times d}} f(X) = \inf\{\langle \nu, f\rangle \mid \nu \in P^{rc}(\mathbb{R}^{m\times d}) : \overline{\nu} = X\}, \tag{1}$$

wobei wie in der Vorlesun $R_O f$ die rang-1-konvexe Hülle bezüglich O bezeichnet.

23. Rang-1-Konvexität II.

(a) Zeige: Das punktweise Maximum zweier Rang-1-konvexer Funktionen ist wieder Rang-1-konvex.

(b) Ist $\mathbb{R}^{d\times d} \ni A \mapsto \det(A)^2$ Rang-1-konvex?

(c) Sei $K = O_2(\mathbb{R})$ die Menge aller orthogonalen 2×2-Matrizen. Zeige, dass die Nullmatrix in K^{rc} liegt. Zeige ferner, dass $|\det(A)| \le 1$ für alle $A \in K^{rc}$.

24. Komponenten-Konvexität. Es sei $M \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $F : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ heißt *komponentenkonvex*, falls für alle $(x_1, ..., x_M) \in \mathbb{R}^m$ und alle $k \in \{1, ..., M\}$ die Abbildung

$$t \mapsto f(x_1, ..., x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, ..., x_M) \tag{2}$$

konvex ist.

(a) Ist $f : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ rang-1-konvex, so kann man eine komponentenkonvexe Funktion $F : \mathbb{R}^{md} \to \mathbb{R}$ dazu auf natürliche Weise assoziieren. Wie?

(b) Es sei $F : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ komponentenkonvex. Zeige: F ist lokal Lipschitzstetig. Einen Hinweis gibt es am Ende dieses Blattes.

(c) Finde eine komponentenkonvexe Funktion auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$ (oder auch andere Matrizendimensionen), die nicht rang-1-konvex ist.

25. Young-Maße und unser nicht-konvexes Minimierungsproblem.[= Aufgabe 21] Wir betrachten noch einmal das Funktional aus dem Beispiel am Ende des Kapitels zur Direkten Methode, d.h. $\mathcal{F} : W_0^{1,4}(-1,1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{F}[u] := \int_{-1}^{1} ((\partial_x u)^2 - 1)^2 + u^2 \, dx. \tag{3}$$

Sei $(u_j) \subset W_0^{1,4}(-1,1)$ beliebig gewählt derart, dass $\lim_{j\to\infty} \mathcal{F}[u_j] = 0$ [$= \inf \mathcal{F}$]. In dieser Aufgabe untersuchen wir, welches Young-Maß von $(\partial_x u_j)_{j=1}^{\infty}$ generiert wird. Wer möchte kann diese Aufgabe freihändig versuchen. Allerdings gibt es auch auf der letzten Seite des Blattes eine Anleitung, die hilfreich sein könnte.

26. Die Rang-1-konvexe Hülle II.[=Aufgabe 19] In der Vorlesung haben wir gesehen, was die Rang-1-konvexe Hülle einer Kompakten Menge K ist. Ihre Charakterisierung ist natürlich, wenn man Rang-1-konvexe Funktionen als gegebenes Konzept akzeptiert. Die Rang-1-konvexe Hülle einer offenen Menge haben wir impliziter konstruiert. Dadurch bleibt eine Subtilität:

(a) Es sei $O \subset \mathbb{R}^{m\times d}$ offen und O^{rc} definiert wie in Definition 13 der Vorlesung. Zeige: O^{rc} ist offen.

27. Ein Trennungssatz von Hahn-Banach für lokalkonvexe topologische Vektorräume. Aus der Funktionalanalysis kennt man womöglich den Trennungssatz für konvexe abgeschlossene Teilmengen eines Banachraumes. Hier wollen wir uns mit Literaturrecherche eine Verallgemeinerung des Satzes erarbeiten, die folgendes Resultat erlaubt:
Theorem: Es sei X ein Banachraum und $A \subset X^*$ konvex und schwach-*-abgeschlossen. Sei zudem $g \in X^* \setminus A$. Dann gibt es $x \in X$ sodass

$$g(x) < \inf_{f\in A} f(x). \tag{4}$$

(a) Überzeuge dich erstmal, dass die Aussage nicht aus der einfachen Banachraum-Version von Hahn Banach folgt

(b) Lies im Buch 'Funktionalanalysis' von Dirk Werner (3.Auflage, 2000) durch den Abschnitt über lokalkonvexe Topologien und beweise dann das obenstehende Theorem. Hilfreich für die Aussage sind Theorem VIII.2.12. und Korollar VIII.3.4.. Eine Google-Suche kann auch hilfreich sein.

Hinweis zu Aufgabe 24: Sehr hilfreich ist das folgende Resultat: Es sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{|g(b) - g(a)|}{|b - a|}|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]. \tag{5}$$

Für die Aufgabe: Benutze Induktion nach M und zeige, dass F auf $[-R, R]^M$ Lipschitz-stetig für alle $R > 0$ ist. Wenn die Notation zu aufwändig ist: Der Spezialfall $M = 2$ enthält bereits die gesamte Komplexität des Problems und ist wesentlich notationsfreundlicher.

Anleitung zu Aufgabe 25: Zunächst ist es wichtig zu beobachten, dass $(\partial_x u_j)_{j=1}^{\infty}$ ein Young Maß $x \to \mu_x$ generiert dann und nur dann wenn jede Teilfolge der Folge eine Teilfolge besitzt, die dasselbe Maß $x \to \mu_x$ generiert. Nehmen wir nun an eine Teilfolge generiert ein Young-Maß $x \mapsto \mu_x$. Zeige mit Methoden aus der Vorlesung, dass $\operatorname{supp}(\mu_x) \subset \{-1, 1\}$ für fast alle $x \in (-1, 1)$. Da $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ kann man also schreiben

$$\mu_x = \lambda(x)\delta_1 + (1 - \lambda(x))\delta_{-1}, \tag{6}$$

für eine messbare nichtnegative Abbildung λ. Es muss noch gezeigt werden, dass $\lambda(x) = \frac{1}{2}$ fast überall. Verwende hierfür die Gleichung

$$u_j(a) = \int_0^a \partial_x u_j(x) dx \quad \forall a \in (-1, 1) \tag{7}$$

Die linke Seite geht für jedes a gegen Null (warum ?). Für die rechte Seite kann man mit der Konstruktion des Young-maßes arbeiten und sehen, dass die für $j \to \infty$ gegen $\int_0^a (1 - 2\lambda(x))dx$ konvergiert.