Universität Ulm

Besprechung: Freitag, 22.11.2019

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2019/20
Punktzahl: keine

Advanced Topics in the Calculus of Variations: Blatt 4

28. C^0-feine Approximationen.

In der Vorlesung haben wir einen neuen Konvergenzbegriff kennengelernt, nämlich den der C^0-feinen Approximationen. Wie sich herausstellen wird, ist dieser Begriff geringfügig stärker als die gleichmäßige Konvergenz, insbesondere am Rand des Definitionsbereiches. Sei für diese Aufgabe $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

(a) Es sei $\mathcal{F} \subset C(\Omega; \mathbb{R}^m)$ eine Familie stetiger Funktionen. Zeige: Hat $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine C^0-feine Approximation, so gibt es eine Folge $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ die gleichmäßig gegen f konvergiert. Insbesondere ist f dann stetig.

(b) Gebe ein Beispiel für eine Folge $(f_n)_{n=1}^\infty \subset C((0,1), \mathbb{R})$ und $f \in C((0,1), \mathbb{R})$ derart, dass $f_n \to f$ gleichmäßig auf $(0,1)$ gilt, aber f keine C^0-feine Approximation in der Menge $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ besitzt. Beweise deine Behauptung.

(c) Es bestehe $\mathcal{F} \subset C^0(\Omega; \mathbb{R}^m)$ aus stetigen Funktionen derart, dass alle $g \in \mathcal{F}$ eine stetige Fortsetzung auf $\overline{\Omega}$ haben. Zeige: Hat f in $\mathcal{F}$ eine C^0-feine Approximation, so hat auch f eine stetige Fortsetzung auf $\overline{\Omega}$ und es gibt ein $h \in \mathcal{F}$ mit $h_{|\partial\Omega} = f_{|\partial\Omega}$.

(d) Kannst Du dein Beispiel aus Aufgabe (b) auch so wählen, dass f_n, f auf $(0,1)$ gleichmäßig stetig sind und $f(0) = f_n(0), f(1) = f_n(1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt ? [Beachte: Wir dürfen aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von $f(0), f(1)$ im Sinne der stetigen Fortsetzung sprechen!]

29. C^0-feine Approxmationen und das Zwei-Gradienten-Problem. In Lemma 19 haben wir gesehen, dass wir für jede Matrix C auf einer Rang-1-Verbindungsstrecke von Rang-1-verbundenen Matrizen A, B, die Funktion $x \mapsto Cx + b$ eine C^0-feine Approximation besitzt. Hier wollen wir probieren, eine Verbindung zu dem Kapitel über das Zwei-Gradienten-Problem herzustellen.

(a) Wir benötigen zunächst eine Vorüberlegung: Ist $Z \subset \mathbb{R}^M$ eine konvexe Menge, so ist die Abbildung $\mathbb{R}^M \ni x \mapsto \operatorname{dist}(x, Z)$ konvex.

(b) Zeige: Die Tatsache, dass C eine Konvexkombination von A und B ist, ist notwendig für die Aussage. Konkreter: Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times d}$, $b \in \mathbb{R}^m$ derart, dass für alle $\delta \in (0, \frac{|A-B|}{2})$ die Abbildung $x \mapsto Cx + b$ eine C^0-feine Approximation von Abbildungen aus

$$\mathcal{F} := \{f : \Omega \to \mathbb{R}^m \text{ stückweise affin} : \operatorname{dist}(\nabla u(x), \{A, B\}) < \delta\} \tag{1}$$

besitzt. Zeige: Dann gibt es $\lambda \in [0,1]$ sodass $C = \lambda A + (1-\lambda)B$.

30. Die Rang-1-konvexe Hülle III. Hier werden wir erstmals ein Beispiel eines Kompaktum K sehen, wo konvexe Hülle und Rang-1-konvexe Hülle auseinanderfallen.

(a) Zeige: Ist $K \subset \mathbb{R}^{m\times d}$ kompakt, so ist K^{rc} kompakt.

(b) Zeige: Für jedes Kompaktum K ist K^{rc} in der konvexen Hülle von K enthalten.

(c) Wie auf dem vorherigen Blatt bezeichnet $O_2(\mathbb{R})$ die Menge aller orthogonalen 2×2-Matrizen. Sei $K := \{A \in O_2(\mathbb{R}) : \det(A) = -1\}$. Zeige: K^{rc} ist eine echte (!) Teilmenge der konvexen Hülle von K. Gilt dasselbe auch für $\widetilde{K} := \{A \in O_2(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$.?

31. C^0-feine Approximationen affiner Funktionen In der Vorlesung haben wir einige Sätze zur C^0-feinen Approximation affiner/-oder C^1- Funktionen durch stückweise affine Lipschitz-Funktionen gezeigt.

(a) Lemma 22 ließe sich in 2 Zeilen beweisen, wenn man die Forderung

$$\{x \in \Omega : \nabla u(x) \in U\} \geq (1-\delta)|\Omega| \tag{2}$$

weglässt (bzw den Fall $\delta = 1$ betrachtet). Wie?

32. In-Approximationen. Wir betrachten für diese Aufgabe $\mathbb{R}^{m\times d}$ ausgestattet mit der Hilbert-Schmidt-Norm, d.h

$$||A|| := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{d} a_{ij}^2}. \tag{3}$$

(a) Zeige: Für alle $\alpha > 0$ ist $(\partial B_\alpha(0))^{rc} = \overline{B_\alpha(0)}$.

(b) Definieren wir nun $U_n := B_{1-\frac{1}{n+1}}(0) \setminus B_{1-\frac{1}{n}}(0)$. Zeige: $(U_n)_{n=1}^\infty$ ist eine In-Approximation von $\partial B_1(0)$.

33. Konvexe Integration. In der Vorlesung haben wir Theorem 24 besprochen, welches bereits als zentraler Satz zur konvexen Integration hervorgehoben wurde. Hier wollen wir eine erste Anwendung diskutieren.

(a) Sei $m = d = 1$. Zeige auf zwei Arten (wie unten beschrieben), dass die Nullfunktion $v : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $v \equiv 0$ eine C^0-feine Approximation in

$$\mathcal{F} := \{u : (-1,1) \to \mathbb{R} \text{ Lipschitz} : u'(x) \in \{-1,1\} \text{ f.ü.}\} \tag{4}$$

- **Weg 1:** Finde eine In-Approximation von $(-1,1)$ und arbeite mit Theorem 1.
- **Weg 2:** Explizit mithilfe von den Überlegungen in Abschnitt 6.1 von https://arxiv.org/pdf/1111.2700.pdf.

For more information on the course see
https://www.uni-ulm.de/index.php?id=99696&no_cache=1