Advanced Topics in the Calculus of Variations: Blatt 10

50. Die Reaktions-Diffusions-Gleichung. Am Paradebeispiel der Reaktions-Diffusionsgleichung wollen wir hier sehen, wie man das Mountain-Pass Lemma dazu benutzen kann. Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ offen und beschränkt und $\mathcal{E} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p+1} \int_\Omega |u|^{p+1} \,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

wober $p \in (1, \frac{n+2}{n-2})$ fest. Wir werden ohne Beweis verwenden, dass $\mathcal{E} \in C^{1,1}_{loc}(H_0^1(\Omega))$. (Wer möchte kann dies aber auch einfach zeigen).

(a) Zeige zunächst: $\mathcal{E}$ ist nicht koerziv und hat keinen globalen Minimierer in $H_0^1(\Omega)$. Ferner ist jeder kritische Punkt $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von der sogenannten Reaktions-Diffusions-Gleichung

$$\begin{cases} -\Delta u - |u|^{p-1} u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

(b) Zeige: Jede Palais-Smale Folge für $\mathcal{E}$ ist beschränkt.

(c) Zeige, dass $\mathcal{E}$ die Palais-Smale Bedingung zu jedem Energieniveau erfüllt.

(d) Zeige mit dem Mountain-Pass-Lemma die Existenz eines kritischen Punktes u_{krit} mit $\mathcal{E}(u_{krit}) > 0$. Folgere, dass (2) keine eindeutige Lösung hat.

51. Mountain-Pässe mit anderer Geometrie. Es sei $S \subset H$ eine Teilmenge eines Hilbertraumes H und Q eine topologische Untermannigfaltigkeit von H mit relativem Rand ∂Q. Im Folgenden sagen wir, dass S und Q *verschlungen* sind falls $S \cap \partial Q = \emptyset$ und für alle $h \in C^0(H, H)$ mit $h_{|\partial Q} = \mathrm{id}$ gilt, dass $S \cap h(Q) \neq \emptyset$.

(a) Es sei H ein Hilbertraum und $\mathcal{E} \in C^{1,1}_{loc}(H; \mathbb{R})$ erfülle die Palais-Smale-Bedingung. Seien $S, Q \subset H$ verschlungen und

$$\alpha := \inf_{u \in S} \mathcal{E}(u) > \sup_{u \in \partial Q} \mathcal{E}(u). \tag{3}$$

Sei zudem $\Gamma := \{h \in C^0(H, H) : h_{|\partial Q} = \mathrm{id}\}$. Zeige, dass für

$$\beta := \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in Q} \mathcal{E}(h(u)) \tag{4}$$

gilt, dass $\beta \geq \alpha$ und β ein kritischer Wert von $\mathcal{E}$ ist.

(b) Zeige, dass das klassische Mountain Pass Lemma ein Spezialfall des oben genannten Satzes ist.

(c) Beweise durch ein Bild, dass in $H = \mathbb{R}^3$ für alle $\rho < R, A > 0$ Die Mengen $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_2^2 + x_3^2 = \rho^2\}$ und $Q = [-A, A] \times [0, R] \times \{0\}$ verschlungen sind.
Bemerkung: Allgemein gilt folgende Aussage (die später verwendet werden soll): Es sei $V \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum derart dass $\dim V^\perp < \infty$. Dann sind für alle $\rho > R, A > 0$ und $v \in V : ||v|| = 1$ die Mengen

$$S := \{u \in V : ||u|| = \rho\}, \quad Q := \{sv + w : w \in V^\perp : ||w|| \leq A, s \in [0, R]\} \tag{5}$$

in H verschlungen.

Im Folgenden seien $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \to \infty$ die sogenannten *Dirichlet-Eigenwerte*, d.h. es gibt eine Orthonormalbasis $(\phi_k)_{k=1}^\infty \subset L^2(\Omega)$ von $L^2(\Omega)$ aus schwachen Lösungen von

$$\begin{cases} -\Delta \phi_k = \lambda_k \phi_k & \text{in } \Omega \\ \phi_k = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

(d) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $\lambda > 0$ kein Dirichlet-Eigenwert und $p \in (1, \frac{n+2}{n-2})$. Definiere $\mathcal{E} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{p+1} \int_\Omega |u|^{p+1} \, \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Zeige, dass $\mathcal{E}$ einen kritischen Punkt $u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0$ besitzt. Hierbei darf ohne Beweis verwendet werden, dass $\mathcal{E} \in C^{1,1}_{loc}(H_0^1(\Omega); \mathbb{R}^n)$ ist und die Palais-Smale Bedingung erfüllt. Einen Hinweis findest Du am Ende des Blattes.

52. Erste Überlegungen zur H-Flächengleichung.

(a) Um in Satz 3.3 die Unterhalbstetigkeit zu zeigen, haben wir $H > 0$ angenommen. Allerdings wollen wir die H-Flächengleichung eigentlich für alle $H \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ lösen. Beschränkt die Annahme $H > 0$ die Allgemeinheit?

(b) Zeige: Für Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt stets

$$a \cdot (b \times c) = \det(a, b, c) \tag{8}$$

(c) Im Beweis von Satz 3.3 haben wir benutzt, dass sich $H^1 \cap L^\infty$-Funktionen in H^1 durch glatte Funktionen mit gleichmäßiger L^∞-Schranke approximieren lassen. Das wollen wir uns hier genauer überlegen.

(i) Es sei $u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zeige: Dann gibt es $(u_n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap H^1(\mathbb{R}^n)$ sodass $u_n \to u$ in $H^1(\mathbb{R}^n)$ und punktweise f.ü.. Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $||u_n||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$

(ii) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Sei $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Zeige: Dann gibt es $(u_n) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ derart, dass $u_n \to u$ in $H^1(\Omega)$ und punktweise fast überall. Ferner gilt $||u_n||_{L^\infty(\Omega)} \leq ||u||_{L^\infty(\Omega)}$ (die Abschätzung mit Konstante 1 ist kein Schreibfehler!). Einen Hinweis findest Du am Ende des Blattes.

Hinweis zu Aufgabe 51(d): Setze $k_0 := \inf\{k \in \mathbb{N} : \lambda_k \geq \lambda\}$ und Verwende die Bemerkung von Aufgabe 51(c) mit $V = \overline{span\{\phi_{k_0}, \phi_{k_0+1}, \phi_{k_0+2}, ...\}}$ (Warum ist $V^\perp$ endlichdimensional ?) und $v = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k_0}}}\phi_{k_0}$. Da $\mathcal{E}$ auf endlichdimensionalen Teilräumen von $H_0^1(\Omega)$ gegen $-\infty$ für $||u|| \to \infty$ strebt (Warum ?) gibt es genügend große $A, R > 0$ sodass für Q wie in der Bemerkung gilt dass, $\mathcal{E}_{|\partial Q} \leq 0$. Zeige, dass es $\rho > 0$ gibt, sodass $\mathcal{E}$ auf S ein positives Infimum hat.

Hinweis zu Aufgabe 52 c (ii): Es sei $Eu \in H^1(\mathbb{R}^n)$ die Sobolev Extension von u. Nun ist $w := \max\{-||u||_\infty, \min\{Eu, ||u||_\infty\}\}$ auch ein Element von $H^1(\mathbb{R}^n)$ (warum ?). Verwende nun Aufgabe 52c(i) für dieses w.