Universität Ulm

Besprechung: Freitag, 07.02.2020

Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Prof. Dr. Emil Wiedemann
Marius Müller
Wintersemester 2019/20
Punktzahl: keine

Advanced Topics in the Calculus of Variations: Blatt 11

53. Die Dualitätsmethode. In der Vorlesung haben wir geklärt, wie wir der Lösung der Possion-Gleichung für rechte Seiten aus $C_0(\overline{\Omega})'$ einen Sinn geben können. Es sei $p \in (1, \infty)$ so, dass $p > \frac{n}{2}$ und $T : L^p(\Omega) \to C_0(\overline{\Omega})$ wie in der Vorlesung. Sei nun $f \in L^1(\Omega) \subset C_0(\overline{\Omega})'$. Sei $u := T^* f \in L^{p'}(\Omega)$ wobei p' so gewählt sei, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Zeige: Dann ist u wohldefiniert und löst die folgende Gleichung

$$\int_\Omega u \Delta \phi \, \mathrm{dx} = \int_\Omega f \phi \, \mathrm{dx} \qquad \forall \phi \in C^2(\overline{\Omega}) : \phi_{|\partial\Omega} = 0. \tag{1}$$

54. Subharmonizität der kleinen Lösung. In der Vorlesung haben wir gesehen dass für eine kleine Lösung u der H-Flächengleichung die Funktion $|u|^2$ schwach subharmonisch ist. Hier wollen wir diese Aussage quantitativ machen. Sei dazu $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u = 2H(\partial_x u \times \partial_y u) & \text{in } \Omega \\ u = u_0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

mit $||u||_\infty < \frac{1}{|H|}$. Zeige, dass $\Delta |u|^2 \geq 2(1 - |H||u|)|\nabla u|^2$

55. Die Produktregel für Sobolevfunktionen. Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ offen und $u, \psi \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. Zeige: Dann ist $u\psi \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ und $\nabla(u\psi) = \psi \nabla u + u \nabla \psi$.

56. Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. Wir definieren für ein $f \in C^\infty(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ die Cauchy-Riemann-Operatoren $\partial_z f := \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f)$ und $\partial_{\overline{z}} f := \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f)$.

(a) Zeige: Für ein holomorphes $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gilt $\partial_{\overline{z}} f = 0$.

(b) Zeige: Es gilt $\Delta f = 4\partial_z \partial_{\overline{z}} f$.

(c) Seien $f = f(w) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g = g(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ glatt. Zeige

$$\partial_z (f \circ g) = (\partial_w f) \circ g \, \partial_z g + (\partial_{\overline{w}} f) \circ g \, \partial_z \overline{g}. \tag{3}$$

57. Polarkoordinaten. Es sei $w \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Zeige

$$|\partial_r w|^2 + \frac{1}{r^2} |\partial_\theta w|^2 = |\nabla w|^2. \tag{4}$$

Diese Formel haben wir im Beweis von Satz 3.8 benutzt.

58. H_0^1 und L^∞ in zwei Dimensionen? Beweise: Für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bettet $H_0^1(\Omega)$ für alle $p \in (1, \infty)$ stetig in $L^p(\Omega)$ ein. Finde dazu eine $H_0^1(\Omega)$-Funktion die nicht in $L^\infty(\Omega)$ liegt. Einen Hinweis findest du am Ende des Blattes.

59. Das Jäger'sche Maximumsprinzip. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ glatt und beschränkt sowie $u_0 \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, $H > 0$ und seien $u_1, u_2 \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ kleine Lösungen von

$$\begin{cases} \Delta u = 2H(\partial_x u \times \partial_y u) & \text{in } \Omega \\ u = u_0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

mit $||u_1||_\infty, ||u_2||_\infty \leq \frac{1}{H}$. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass $u_1 \equiv u_2$. Setze zunachst $f(x) := \phi(|u_1|^2) + \phi(|u_2|^2)$ für eine glatte reellwertige Funktion ϕ, die wir später wählen wollen. Setze auch $z = u_1 - u_2$. Ferner identifizieren wir $x \equiv x_1, y \equiv x_2$.

(a) Zeige, dass

$$L(z) := 2\sum_{j=1}^{2}\partial_j\left[e^{-\frac{f}{2}}\partial_j\left(|z|^2 e^{\frac{f}{2}}\right)\right] = 2\Delta|z|^2 + \nabla f\cdot\nabla|z|^2 + |z|^2\Delta f. \tag{6}$$

(b) Zeige, dass z die Gleichung

$$\Delta z = 2H\left(\partial_1 z\times\partial_2(\frac{u_1+u_2}{2}) + \partial_1(\frac{u_1+u_2}{2})\times\partial_2 z\right) \tag{7}$$

löst. Nutze die Antisymmetrie der Determinante und die Identität $|a\times b|^2 + |a\cdot b|^2 = |a|^2|b|^2$ um zu folgern, dass

$$|z\cdot\Delta z| \leq |H||\nabla(u_1+u_2)|^2\left(|z|^2|\nabla z|^2 - \frac{1}{4}|\nabla|z|^2|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Nutze die Peter-Paul-Ungleichung um zu folgern, dass

$$2\Delta|z|^2 \geq -2|H|^2(|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2)|z|^2 + \frac{|\nabla|z|^2|^2}{|z|^2}. \tag{9}$$

(c) Gehe zurück zu Teilaufgabe (a) und nutze die Peter-Paul Ungleichung um zu zeigen, dass

$$2\sum_{j=1}^{2}\partial_j\left[e^{-\frac{f}{2}}\partial_j\left(|z|^2 e^{\frac{f}{2}}\right)\right] \geq -2|H|^2(|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2)|z|^2 - \frac{1}{4}|z|^2|\nabla f|^2 + |z|^2\Delta f. \tag{10}$$

(d) Benutze die vorigen Teilaufgaben um zu zeigen, dass

$$L(z) = 2\sum_{j=1}^{2}\partial_j\left[e^{-\frac{f}{2}}\partial_j\left(|z|^2 e^{\frac{f}{2}}\right)\right] \geq \sum_{i=1}^{2} 2(-|H|^2 + (1-|H||u_i|)\phi'(|u_i|^2))|\nabla u_i|^2|z|^2 \tag{11}$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\left(\phi''(|u_i|^2) - \frac{1}{2}\phi'(|u_i|^2)^2\right)|\nabla|u_i|^2|^2|z|^2. \tag{12}$$

(e) Zeige: Für die Wahl von $\phi(x) := -2\log\left(\frac{1}{|H|^2} - x\right)$ gilt, dass $L(z)\geq 0$. Warum folgt $z\equiv 0$?

Hinweis zu Aufgabe 58: $\Omega = B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $f(x) := \log \log \frac{1}{|x|}$ tut's.