Universität Ulm

Besprechung: Dienstag, 10.12.2019

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2019/20
Punktzahl: keine

Advanced Topics in the Calculus of Variations: Blatt 6

34. Quasikonvexität. In der Vorlesung haben wir mit Quasikonvexität gearbeitet. Wir haben sie auch als ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für schwach-$*$-unterhalbstetigkeit kennengelernt, was für die Theorie der Variationsrechnung von großer Bedeutung ist, da unsere bisherige Konvexitätsannahme stets nur hinreichend war.

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine (Borel-Borel-)messbare und nach unten beschränkte Funktion. Zeige: f ist genau dann konvex wenn es ein beschränktes Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ gibt derart, dass für alle $\phi \in L^\infty(\Omega)$ mit $\int_\Omega \phi(x)\, \mathrm{d}x = 0$ und alle $x_0 \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x_0 + \phi(x))\, \mathrm{d}x \geq f(x_0). \tag{1}$$

Anmerkung: Die Borel-Borel Messbarkeit benötigen wir nur damit die obenstehende Verkettung $f \circ (x_0 + \phi)$ messbar ist.

(b) Es sei nun f wie in Aufgebenteil (a) und zusätzlich noch stetig. Zeige, dass

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x_0 + \phi(x))\, \mathrm{d}x \geq f(x_0) \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) : \int_\Omega \phi(x)\, \mathrm{d}x = 0 \tag{2}$$

bereits impliziert, dass f konvex ist.

(c) Wir wollen hier zeigen (oder zumindest ein Gefühl dafür geben), dass die Definition der Quasikonvexität nicht vom betrachteten Gebiet Ω abhängt. Konkreter: Gegeben sei eine stetige, nach unten beschränkte Funktion $f : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ Lipschitz-berandet und beschränkt derart, dass

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(A + \nabla\phi(x))\, \mathrm{d}x \geq f(A) \quad \forall \phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)\ \forall A \in \mathbb{R}^{m\times d}. \tag{3}$$

Zeige: Dann gilt für $\widetilde{\Omega} = B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$, dass

$$\frac{1}{|\widetilde{\Omega}|} \int_{\widetilde{\Omega}} f(A + \nabla\phi(x))\, \mathrm{d}x \geq f(A) \quad \forall \phi \in W_0^{1,\infty}(\widetilde{\Omega}; \mathbb{R}^m)\ \forall A \in \mathbb{R}^{m\times d}. \tag{4}$$

(d) Es sei $f : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ quasikonvex. Zeige: Für alle $\epsilon > 0$ ist die Glättung $f * \phi_\epsilon$, wobei $(\phi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ der Standard-Mollifier ist, quasikonvex.

(e) Zeige: $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ ist quasikonvex. Einen Hinweis findest Du am Ende dieses Blattes.

35. In-Approximationen II.[$\simeq$ Aufgabe 32] Wir betrachten für diese Aufgabe $\mathbb{R}^{m\times d}$ ausgestattet mit der Hilbert-Schmidt-Norm, d.h

$$||A|| := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^d a_{ij}^2}. \tag{5}$$

(a) Zeige: Für alle $\alpha > 0$ ist $(\partial B_\alpha(0))^{rc} = \overline{B_\alpha(0)}$.

(b) Definieren wir nun $U_n := B_{1-\frac{1}{n+1}}(0) \setminus \overline{B_{1-\frac{1}{n}}(0)}$. Zeige: $(U_n)_{n=1}^\infty$ ist eine In-Approximation von $\partial B_1(0)$.

36. PDE-Systeme und Differentialinklusionen In der Vorlesung haben wir eine Technik gelernt, wie wir 2×2 PDE-Systeme als Differentialinklusionen in $\mathbb{R}^{4\times 2}$ reformulieren können. Bei der Herleitung waren wir allerdings ein bisschen sloppy, weil wir von klassischen und nicht von schwachen Lösungen ausgegangen sind. Dies wollen wir hier vertiefen. Für die Aufgabe bezeichnen wir die Komponenten eines Vektors $x \in \mathbb{R}^m$ mit $(x^1, x^2, ..., x^m)$.

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt und mit Lipschitz-Rand. Gegeben sei das System

$$(S) : \begin{cases} \Delta u^1 = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta u^2 = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{6}$$

Finde wie in der Vorlesung eine Formulierung für das Problem als Differentialinklusion in $\mathbb{R}^{4\times 2}$.

(b) Sei Ω wie in Teilaufgabe (a). Zeige: Ist $w \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^4)$ eine Lösung der oben genannten Differentialinklusion, so ist $u := (w^1, w^2)$ eine Lösung von (S) in $\mathcal{D}'(\Omega)$, d.h.

$$\int_\Omega Du : D\phi = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^2). \tag{7}$$

Warum haben wir nur die ersten beiden Komponenten genommen?

37. Differentialinklusionen und T_4-Konfigurationen. Um Differentialinklusionen für eine Kompakte Menge K zu lösen können T_4-Konfigurationen hilfreich sein (siehe Lemma 33 und Theorem 24 der Vorlesung!). Hier wollen wir uns klarmachen, dass unser Paradebeispiel aus der Vorlesung tatsächlich eine T_4-Konfiguration ist.

(a) Seien

$$A_1 := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Zeige, dass $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ in T_4-Konfiguration ist und gib außerdem vier Matrizen in $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}^{rc} \setminus \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ an. Eine kleine Starthilfe, damit das Konstruktionsschema ins Rollen kommt: Wähle

$$P_1 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa_1 := 2. \tag{9}$$

(b) Seien

$$M_1 := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 := \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Zeige, dass $\{M_1, M_2, M_3, M_4\} \subset \mathbb{R}^{4\times 2}$ in T_4-Konfiguration ist. Gib außerdem vier Matrizen in $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}^{rc} \setminus \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ an.

38. Konvexe Integration II [$\simeq$ Aufgabe 33] In der Vorlesung haben wir Theorem 24 besprochen, welches bereits als zentraler Satz zur konvexen Integration hervorgehoben wurde. Hier wollen wir eine erste Anwendung diskutieren.

(a) Sei $m = d = 1$. Zeige, dass die Nullfunktion $v : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $v \equiv 0$ eine C^0-feine Approximation in

$$\mathcal{F} := \{u : (-1,1) \to \mathbb{R} \text{ Lipschitz} : u'(x) \in \{-1,1\} \text{ f.ü.}\} \tag{11}$$

Finde hierzu eine geeignete In-Approximation von $(-1,1)$ und arbeite mit Theorem 24.

Hinweis zu Aufgabe 34 (d): Wähle zunächst ein beliebiges $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und rechne die Definition 25 nur für $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ nach. Verwende hierfür die folgende Formel: Fur $u \in W^{2,1}_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ gilt

$$\det(Du) = \partial_1(u^1 \partial_2 u^2) - \partial_2(u^1 \partial_1 u^2). \tag{12}$$