Universität Ulm

Besprechung: Freitag, 20.12.2019

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2019/20
Punktzahl: keine

Advanced Topics in the Calculus of Variations: Blatt 7

39. Die kritische Sobolevkonstante. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass im kritischen Fall $p = \frac{n+2}{n-2}$ die optimale Sobolevkonstante unabhängig vom Gebiet ist. Allerdings wird sie auf beschränkten Gebieten nicht angenommen.

(a) Zeige: Für alle $\rho, R \in (0,\infty)$ gilt $S(\frac{n+2}{n-2}, B_\rho(0)) = S(\frac{n+2}{n-2}, B_R(0))$.

(b) Zeige: Für alle $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt $S(\frac{n+2}{n-2}, \Omega) \geq S$.

(c) Zeige: Für alle $R > 0$ gilt $S(\frac{n+2}{n-2}, B_R(0)) = S$.

(d) Beweise Lemma 1.2 (i).

40. Parade-Beispiele für die Fälle im Concentration-Compactness-Lemma. Im Folgenden sind Folgen von Borel-Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Wir wollen uns überlegen, unter welchen Fall im ersten Concentration-Compactness Lemma diese fallen.

(a) Bitte gib für jeden Fall des Concentration-Compactness-Lemmas (Kompaktheit, Verschwinden, Dichotomie) an, ob es eine Teilfolge gibt, für die der jeweilige Fall erfüllt ist. Begründe Deine Behauptungen.

(i) (Konstante Folgen) $\mu_k = \mu$ für ein konstantes Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ.

(ii) (Verschiebungs-Folgen) $\mu_k = \delta_{ke_1}$, wobei δ_x nach wie vor das Dirac-Maß mit Punktmasse 1 in x bezeichnet und e_1 der erste Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$.

(iii) (Zerstreuungs-Folgen) $\mu_k = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^k \delta_{le_1}$ (mit der selben Notation wie in Aufgabenteil (a)(ii)).

(iv) Gib ein Beispiel für Dichotomie an und zeige ohne Verwendung des Concentration Compactness Lemmas, dass der Dichotomie-Fall zutrifft.

(v) $\mu_k = \frac{2}{k\pi}\frac{1}{1+\frac{x^2}{k^2}}\,\mathrm{d}x$ (n = 1).

(vi) $\mu_k = \frac{2}{\pi}\frac{k}{1+k^2x^2}\,\mathrm{d}x$ (n = 1).

41. Gleichmäßige Konvexität

(a) Beweise Satz 1.5 der Vorlesung. Einen Hinweis findest Du (falls benötigt) am Ende dieses Blattes.

(b) Zeige, dass $(L^1(\mathbb{R}^n), ||\cdot||_{L^1})$ nicht gleichmäßig konvex ist.

(c) Der Satz von Clarkson besagt, dass für $p \in (1,\infty)$ $L^p(\mathbb{R}^n)$ gleichmäßig konvex ist. Folgere, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und $p \in (1,\infty)$ der Raum $D^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ gleichmäßig konvex ist. Einen Hinweis findest Du am Ende dieses Blattes. Außerdem empfehle ich, nicht die in der Vorlesung definierte Norm sondern die Norm

$$||v||_{D^{m,p}(\mathbb{R}^n)} := \left(\sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

zu nehmen.

Anmerkung: Man weiß auch (Satz von Milman), dass alle gleichmäßig konvexen Banachräume reflexiv sind. Daher gibt es die Teilfolge, die wir in der Motivation vor Satz 1.5 gewählt haben.

42. Die $D^{m,p}$-Räume. Im Folgenden wollen wir studieren was der Unterschied zwischen $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ und $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ ist und wie relevant das für die Theorie ist

(a) Sei $\delta > 0$ und $f_\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & |x| > \delta \\ \frac{1}{\delta} & |x| \leq \delta \end{cases}. \tag{2}$$

Zeige $f_\delta \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ aber $f_\delta \notin W^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ für alle $\delta > 0$. Welche Bedeutung hat der punktweise Grenzwert der f_δ für $\delta \to 0$ für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen?

(b) BONUS: Diese Aufgabe setzt weitreichende Kenntnisse der Fouriertransformation und der Hardy-Littlewood-Sobolev-Ungleichung voraus. Letztere kann in [Analysis, Lieb and Loss, Theorem 4.3] nachgelesen werden.

(i) Es sei $G \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung in $\mathbb{R}^n$. Zeige $\widehat{G}(k) = \frac{1}{|k|^2}$ für alle $k \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Zeige damit dass für alle $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le ||\nabla f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)(G * g)(x)\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

(iii) Verwende die explizite Darstellung von G und die Hardy-Littlewood-Sobolev-Ungleichung um zu zeigen, dass

$$||f||_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \le C||\nabla f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{4}$$

Zeige abschließend, dass die Ungleichung auch für beliebige $f \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Hinweis zu Aufgabe 41(a): Falls $||x|| = 0$ so ist nichts zu zeigen. Falls $||x|| \neq 0$, so gibt es laut dem Satz von Hahn-Banach ein stetiges lineares Funktional $x^* \in X^*$ sodass $x^*(x) = ||x||$. Verwende dieses Funktional.

Hinweis zu Aufgabe 41(c): Verwende (meinetwegen ohne gesonderten Beweis), dass $(\mathbb{R}^m, ||\cdot||_p)$ gleichmäßig konvex ist um Folgende Zwischenbehauptung zu zeigen: Seien $(V_i, ||\cdot||_i)$ $(i = 1, ..., m)$ gleichmäßig konvexe normierte Räume, so ist auch $(V_1 \times ... \times V_m, ||\cdot||)$ ein gleichmäßig konvexer normierter Raum, wobei hier für $(v^1, ..., v^m) \in V$

$$||(v^1, ..., v^m)|| := \left(\sum_{i=1}^{m} ||v^i||_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{5}$$

definieren.