Universität Ulm

Besprechung: Freitag, 10.01.2020

Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Prof. Dr. Emil Wiedemann
Marius Müller
Wintersemester 2019/20
Punktzahl: keine

Advanced Topics in the Calculus of Variations: Blatt 8

43. Die subkritische Sobolevkonstante. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $(n \geq 3)$ beschränkt und $1 \leq p < \frac{n+2}{n-2}$. Wir wollen hier zeigen, dass -im Gegensatz zum kritischen Fall $p = \frac{n+2}{n-2}$ - die optimale Sobolev-Konstante $S(p,\Omega)$ angenommen wird.

(a) Es sei $N := \{v \in H_0^1(\Omega) : ||v||_{p+1} = 1\}$. Zeige

$$S(p,\Omega) = \inf_{v \in N} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Beweise, dass das Infimum angenommen wird.

(b) Zeige: Zu jedem $v \in H_0^1(\Omega)$ welches das Infimum in Gleichung (1) realisiert, gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass v eine schwache Lösung von

$$-\Delta v + \lambda |v|^{p-1} v = 0 \tag{2}$$

(c) Wie lässt sich λ explizit ausdrücken?

44. Ein maßwertiges Variationsproblem. Die Konzepte aus der Vorlesung können bei den verschiedensten Varations-Problemen hilfreich sein, nicht nur bei der Findung der Sobolev-Konstante! Im Folgenden bezeichne - wie im ersten Teil der Vorlesung - $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}^n$. Ferner definieren wir

$$\mathcal{P}_{sym}(\mathbb{R}^n) := \{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) : \exists\, w \in \mathbb{R}^n : \mu(B - w) = \mu(-B - w) \; \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\} \tag{3}$$

die Menge aller Maße die eine Spiegel-Symmetrie in $\mathbb{R}^n$ haben. Das Zentrum w der Spiegel-Symmetrie ist dabei beliebig.

Es sei $f \in C(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $f(z) \geq c|z|^\alpha$ für ein $\alpha > 0, c > 0$. Betrachte das folgende Funktional

$$\mathcal{E} : \mathcal{P}_{sym}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \tag{4}$$

gegeben durch

$$\mathcal{E}(\mu) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \, \mathrm{d}\mu(x) \, \mathrm{d}\mu(y). \tag{5}$$

Zeige, dass $\inf_{\mu \in \mathcal{P}_{sym}(\mathbb{R}^n)} \mathcal{E}$ von einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu^* \in \mathcal{P}_{sym}(\mathbb{R}^n)$ angenommen wird. Einen Hinweis findest Du am Ende des Blattes.

45. Der Satz von Vitali. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Bedingung (ii) im Satz von Vitali ist dann trivialerweise erfüllt.

(a) Es erfülle $(f_k)_{k=1}^\infty \subset L^1(\Omega)$ die Bedingung (i) m Satz von Vitali. Zeige, das $(f_k)_{k=1}^\infty$ gleichgradig integrierbar im Sinne des ersten Teiles der Vorlesung ist.

(b) Es sei $(f_k)_{k=1}^\infty \subset L^1(\Omega)$ gleichgradig integrierbar im Sinne des ersten Teiles der Vorlesung. Dann erfüllt $(f_k)_{k=1}^\infty$ die Bedingung (i) im Satz von Vitali.

(c) BONUS: Beweise den Konvergenzsatz von Vitali unter der Zusatzannahme, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist. Einen Hinweis findest du am Ende des Blattes.

46. Einige Details in den Beweisen von Satz 1.9,1.10,1.11.

(a) Geht der Beweis des zweiten Concentration-Compactness Lemmas (Satz 1.10) für $p = 1$ schief? Wenn ja, wo? Ist der Beweis zu retten?

(b) (Invarianzen des Minimierungsproblems für S) Sei wie in der Vorlesung $n > mp$, $p \in (1, \infty)$ und $q := \frac{np}{n-mp}$. Für $u \in D^{m,p}(\mathbb{R}^n), y \in \mathbb{R}^n$ und $R > 0$ definieren wir

$$v(x) := R^{\frac{-n}{q}} u\left(\frac{x-y}{R}\right) \tag{6}$$

Zeige $||v||_q = ||u||_q$ und $||v||_{D^{m,p}} = ||u||_{D^{m,p}}$. Welche Rolle spielt das im Beweis von Satz 1.11?

(c) (Die Konzentrationsfunktion für Maße mit L^1-Dichte) Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren, ähnlich wie im Beweis von Satz 1.11, $Q_f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$Q_f(R) := \max_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_{\frac{1}{R}}(y)} |f(\xi)| \, \mathrm{d}\xi \tag{7}$$

(i) (vgl. Aufgabe 15) Zeige: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass

$$\int_A |f| \, \mathrm{d}x < \epsilon \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : |A| < \delta \tag{8}$$

(ii) Zeige: Q_f ist wohldefiniert, d.h. das Maximum in der Definition wird angenommen.

(iii) Zeige: Q_f ist stetig auf $(0, \infty)$.

(iv) Zeige, dass $\lim_{R \to \infty} Q_f(R) = 0$ und $\lim_{R \to 0} Q_f(R) = ||f||_{L^1}$.

Hinweis zu Aufgabe 44: Wähle zunächst eine Minimalfolge $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$. Durch eine Translation der der μ_k kann man annehmen dass $\mu_k(-B) = \mu_k(B)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (Warum?). Verwende (nach Auswahl einer Teilfolge) das Concentration Compactness Lemma 1. Schließe Dichotomie und Verschwinden aus, um Kompaktheit zu erlangen. Sei dann $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ die Folge aus Satz 1.9 (i) (also dem Kompaktheitsfall). Definiere

$$\widetilde{\mu}_k(B) := \mu_k(B - x_k) \tag{9}$$

und zeige, dass $\widetilde{\mu}_k$ schwach$-*$ in $M(\mathbb{R}^n)$ gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu^* \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert. Warum ist $\mathcal{E}$ schwach$-*$-unterhalbstetig ?
Kleiner Hinweis noch: Die Dichotomie ist leicht auszuschließen und die Symmetrie wird dabei nicht benötigt. Zum Ausschließen des Verschwindens wird die Symmetrie benötigt. Dieser Schritt ist auch etwas schwerer. Wer es nicht hinbekommt kann für's Erste ruhig akzeptieren, dass Verschwinden nicht auftritt.

Hinweis zu Aufgabe 45 (c): Verwende den Satz von Egorov aus der Maßtheorie.