Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Prof. Dr. Emil Wiedemann
Marius Müller
Wintersemester 2019/20
Punktzahl: keine

Advanced Topics in the Calculus of Variations: Blatt 9

47. Die Interpolationsungleichung. Im Beweis von Satz 1.11 haben wir die Interpolationsungleichung benutzt. Diese wollen wir hier in einer Dimension genauer verstehen. Im Folgenden bezeichnet $C(\cdot)$ stets eine feste Konstante, die nur von den in den Klammern genannten Größen abhängt.

(a) Zeige: Für alle $f \in C^\infty([0,1])$ gilt

$$|f'(0)|^p \le C(p) \left(\int_0^1 |f''(x)|^p \, \mathrm{d}x + \int_0^1 |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right). \tag{1}$$

Einen Hinweis findest du am Ende des Blattes.

(b) Sei nun $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Zeige: Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $\epsilon > 0$ gilt

$$|g'(x)|^p \le \frac{C(p)}{\epsilon} \left(\epsilon^p \int_x^{x+\epsilon} |g''(t)|^p \, \mathrm{d}t + \frac{1}{\epsilon^p} \int_x^{x+\epsilon} |g(t)|^p \, \mathrm{d}t \right). \tag{2}$$

(c) Folgere, dass für alle $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $\epsilon > 0$ gilt

$$||g'||_{L^p(\mathbb{R})} \le C(p)(\epsilon ||g''||_{L^p(\mathbb{R})} + \epsilon^{-1} ||g||_{L^p(\mathbb{R})}). \tag{3}$$

(d) Folgere weiterhin, dass für alle $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $\epsilon > 0$ gilt dass

$$||g''||_{L^p(\mathbb{R})} \le \widetilde{C}(p)(\epsilon ||g'''||_{L^p(\mathbb{R})} + \epsilon^{-2} ||g||_{L^p(\mathbb{R})}), \tag{4}$$

$$||g'||_{L^p(\mathbb{R})} \le \overline{C}(p)(\epsilon ||g'''||_{L^p(\mathbb{R})} + \epsilon^{\frac{-1}{2}} ||g||_{L^p(\mathbb{R})}). \tag{5}$$

Vergewissere dich, dass die Potenzen von ϵ in den betrachteten Spezialfällen mit der in der Vorlesung benutzten Ungleichung übereinstimmen.

(e) Eine andere geläufige Version der Interpolationsungleichung liest sich so:

$$||g'||_{L^p(\mathbb{R})} \le C(p) ||g''||_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} ||g||_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Zeige, dass diese Ungleichung äquivalent zu (3) ist. Kannst du (4) und (5) auch in dieser Form schreiben?

48. Das Mountain-Pass Lemma in $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeige: Beim Mountain Pass Lemma im $\mathbb{R}^n$ (Satz 2.1) kann auf die Voraussetzung der Koerzivität von $\mathcal{E}$ nicht verzichtet werden. (ein bildlicher Beweis ist hier auch möglich, aber es geht auch rigoros!)

(b) Zeige: Es seien $\mathcal{E}, x_1, x_2, \beta$ wie in Satz 2.1. Zeige: Es gilt $\beta > \max\{\mathcal{E}(x_1), \mathcal{E}(x_2)\}$ und für alle $\alpha \in (\max\{\mathcal{E}(x_1), \mathcal{E}(x_2)\}, \beta)$ ist $E_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{E}(x) \le \alpha\}$ nicht zusammenhängend.

49. Findung von lokalen Minima. Es sei H ein reeller Hilbertraum und es erfülle $\mathcal{E} \in C^{1,1}_{loc}(H, \mathbb{R})$ die Palais Smale Bedingung. Sei ferner $\rho \ge 0$ so dass $\mathcal{E}$ auf $B_\rho(0)$ nach unten beschränkt ist und

1. $\mathcal{E}(0) = 0$
2. Es existieren $\alpha > 0$, $\rho > 0$ so, dass $||u||_H \ge \rho \ \Rightarrow \mathcal{E}(u) \ge \alpha$.

Zeige: $\mathcal{E}$ hat ein lokales Minimum in $B_\rho(0)$. Einen Hinweis findest du am Ende des Blattes.

Hinweis zu Aufgabe 47 a: Sei $x \in [0, \frac{1}{3}]$ und $y \in [\frac{2}{3}, 1]$. Zeige zunächst, dass es dann ein $\xi \in [0, 1]$ gibt, sodass

$$|f'(\xi)| \leq 3(|f(x)| + |f(y)|) \tag{7}$$

Hinweis zu Aufgabe 49: Sei $\beta := \inf\{\mathcal{E}(y) : y \in B_\rho(0)\}$. Falls $\beta \geq 0$ sind wir fertig (Warum?). Falls $\beta < 0$ wende das Deformationslemma (Lemma 2.5) an.