ulm university universität uulm

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
SoSe 2011

Übungen zu Evolutionsgleichungen

Blatt: 1

1. Sei X der Hilbertraum aller Funktionen über $\mathbb{Z}^n$, d.h. aller Folgen mit Indizes in $\mathbb{Z}^n$, (4)

$$X := \{(x_v)_{v\in\mathbb{Z}^n} : x_v \in \mathbb{R}\}.$$

Jedes Element v des Gitters $\mathbb{Z}^n$ ist genau mit denjenigen $w \in \mathbb{Z}^n$ verbunden, für die $|v-w| = 1$; wir schreiben $v \sim w$. Gegeben sei der Diffusionsoperator

$$A : (x_v)_{v\in\mathbb{Z}^n} \mapsto (\sum_{v\sim w}(x_v - x_w))_{v\in\mathbb{Z}^n}.$$

Zeige, dass A beschränkt auf X ist. Ist das zugehörige (ACP) wohlgestellt?

2. Sei X ein Banachraum und A ein beschränkter, linearer Operator auf X, d.h. A ist stetig und auf dem ganzen Raum X definiert. Ferner sei $f \in C([0,\infty);X)$ und $x \in X$. (4)
Zeige, dass das abstrakte, inhomogene Cauchy-Problem

$$\dot{u}(t) - Au(t) = f(t) \quad \forall t > 0, \quad u(0) = x,$$

genau eine Lösung $u \in C^1([0,\infty);X)$ besitzt und diese durch die “Variation-der-Konstanten-Formel”

$$u(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds, \qquad t \geq 0,$$

gegeben ist.
Hinweis: Man mache sich klar, dass der Beweis aus “Gewöhnliche Differentialgleichungen” auch in diesem Fall funktioniert.