Übungen zu Evolutionsgleichungen

Blatt: 2

(Übung 5.Mai 2011)

1. Sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe (mit anderem Namen C_0-Halbgruppe). Zeige, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ genau dann zu einer stark stetigen Gruppe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ fortgesetzt werden kann, wenn $T(t_0)$ für ein $t_0 > 0$ invertierbar ist. (4)

2. Sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe. Zeige, es existieren Konstanten $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$, so dass $\|T_t\| \leq Me^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$. (4)

3. Sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum X mit Erzeuger A. Ein Vektor $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(A^k)$ heißt *vollständig* bezüglich $(T(t))_{t\geq 0}$, falls (4)

$$e^{tA}x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ konvergiert.

   (a) Zeige, dass für einen bezüglich $(T(t))_{t\geq 0}$ vollständigen Vektor x stets $T(t)x = e^{tA}x$ für alle $t \geq 0$ gilt.

   (b) Sei $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ jetzt eine C_0-Gruppe auf X. Setze für $x \in X$

$$x_n(z) := \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{n(t-z)^2}{2}} T(t)x dt, \qquad n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C}.$$

   Zeige, dass diese Integrale für jedes $x \in X$ punktweise gegen eine Funktion $x_n(\cdot) : \mathbb{C} \mapsto X$ konvergieren, dass $x_n(\cdot)$ eine ganze Funktion (d.h. holomorph auf ganz $\mathbb{C}$) ist, dass $\lim_{n\to\infty} \|x_n(0) - x\|_X = 0$ und zu guter Letzt dass $x_n(s) = T(s)x_n(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $s \in \mathbb{R}$.

   (c) Folgere, dass für eine C_0-Gruppe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ die Menge der vollständigen Vektoren dicht in X liegt und dass $T(t)x = e^{tA}x$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, falls x vollständig ist.