Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper

SoSe 2011

Übungen zu Evolutionsgleichungen

Blatt: 3

(Übung 19.Mai 2011)

1. Seien H_1, H_2, H_3 Hilberträume und $T : H_1 \supseteq D(T) \mapsto H_2$, $S : H_1 \supseteq D(S) \mapsto H_2$ und $R : H_2 \supseteq D(R) \mapsto H_3$, wobei $D(T), D(S)$ und $D(R)$ jeweils dicht liegen. Zeige: (4)
   (a) $T \subseteq T^{**}$, falls $D(T^*)$ dicht in H_2 liegt;
   (b) $T^* + S^* \subseteq (T+S)^*$, falls $D(T+S) = D(T) \cap D(S)$ dicht in H_1 ist;
   (c) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$;
   (d) $T^* R^* \subseteq (RT)^*$, falls $D(RT) = \{x \in D(T) : T(x) \in D(R)\}$ dicht in H_1 ist;
   (e) $S^* \subseteq T^*$, wenn $T \subseteq S$;
   (f) $\mathrm{Rg}(\lambda - T)^\perp = \mathrm{Ker}(\overline{\lambda} - T^*)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$;
   (g) $\|(T-\lambda)x\|^2 = \|(T - \operatorname{Re}\lambda)x\|^2 + |\operatorname{Im}\lambda|^2 \|x\|^2$ für alle $x \in D(T)$, falls T symmetrisch ist;

   wobei bei den letzten beiden Punkten $H_1 = H_2$ zu setzen ist.
   Was gilt in den obigen Aussagen, wenn die Operatoren beschränkt sind?

2. Beweise den Satz von Hellinger-Toeplitz: (4)
   Wenn $A : H \mapsto H$ ein symmetrischer Operator auf einem Hilberraum H ist und $D(A) = H$, dann ist A beschränkt.