ulm university universität uulm

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
SoSe 2011

Übungen zu Evolutionsgleichungen

Blatt: 4

(Übung 19.Mai 2011)

1. Sei X ein Banachraum und A ein abgeschlossener Operator auf X. Zeige, dass für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (i) $\lambda - A$ ist nicht injektiv oder $\mathrm{Rg}(\lambda - A)$ ist nicht abgeschlossen.
   (ii) Es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in N$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|\lambda x_n - Ax_n\| = 0$.
   (iii) Zu jedem $c > 0$ existiert ein $x \in X$ mit $\|(\lambda - A)x\| \leq c\|x\|$.

2. Sei $U : H \supseteq D(U) \mapsto H$ ein isometrischer Operator auf dem Hilbertraum H, d.h. $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in D(U)$. Zeige:
   (a) Für $x \in D(U)$ und $y \in D(U)$ gilt $\langle Ux\,,\, Uy\rangle = \langle x\,,\, y\rangle$.
   (b) Falls $\mathrm{Rg}(Id - U)$ dicht in H liegt, ist $Id - U$ injektiv.
   (c) Ist einer der Räume $D(U)$, $\mathrm{Rg}(U)$, $\mathrm{G}(U) := \{(x, Ux) \in H \times H : x \in D(U)\}$ abgeschlossen, so sind es auch die beiden anderen.

3. Sei A ein abgeschlossener, symmetrischer Operator auf dem Hilbertraum H. Zeige zuerst, dass $A + i$ injektiv ist, und definiere dann die Cayley-Transformierte $C(A) : \mathrm{Rg}(A + i) \mapsto \mathrm{Rg}(A - i)$ durch $C(A) := (A - i)(A + i)^{-1}$. Zeige, dass $C(A)$ eine Isometrie ist und dass A genau dann selbstadjungiert ist, wenn $C(A)$ unitär ist.