ulm university universität ulm

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
SoSe 2011

Übungen zu Evolutionsgleichungen

Blatt: 5

(Übung 31.5.2011)

1. Sei Ξ ein σ-endlicher Maßraum und $q : \Xi \mapsto \mathbb{C}$ eine messbare Funktion und gegeben sei der Multiplikationsoperator $M_q : L^2(\Xi) \mapsto L^2(\Xi)$ mit $M_q f(\cdot) := q(\cdot)f(\cdot)$, $D(M_q) = \{f \in L^2(\Xi) : qf \in L^2(\Xi)\}$.
   (a) Zeige, dass M_q abgeschlossen und dicht definiert ist.
   (b) Zeige, das M_q genau dann ein beschränkter Operator ist, wenn die Funktion q wesentlich beschränkt ist (d.h. es existiert $m > 0$ mit $\mu\{x \in \Xi : |q(x)| \geq m\} = 0$).
   (c) Bestimme das Spektrum, das approximative Punktspektrum und die Eigenwerte von M_q.
   (d) Zeige weiter, dass M_q ganau dann symmetrisch ist, wenn q eine reellwertige Funktion ist, in welchem Fall M_q sogar selbstadjungiert ist.
2. Sei P ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum H. Zeige mittels des Spektralsatzes, dass P genau dann eine orthogonale Projektion ist (d.h. $\mathrm{Rg}(P)$ und $\mathrm{Ker}(P)$ stehen senkrecht aufeinander), wenn für das Spektrum von P gilt $\mathrm{sp}(P) = \{0, 1\}$.
3. Sei A ein abgeschlossener, symmetrischer Operator auf dem Hilbertraum H. Zeige, dass für das Spektrum von A genau einer der folgenden Fälle vorliegt: $\sigma(A) = \mathbb{C}$, $\sigma(A) = \{\lambda : \mathrm{Im}\lambda \geq 0\}$, $\sigma(A) = \{\lambda : \mathrm{Im}\lambda \leq 0\}$ oder $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$, wobei A genau dann selbstadjungiert ist, wenn $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.