Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper

SoSe 2011

Übungen zu Evolutionsgleichungen

Blatt: 6

(Übung 16.6.2011)

1. Sei X ein Banach-Raum und A ein abgeschlossener, linearer Operartor auf X mit nicht leerer Resolventenmenge $\rho(A)$. Sei $\lambda_0 \in \rho(A)$. Zeige, dass für Spektrum σ und Punktspektrum σ_p gilt

$$\sigma(R(\lambda_0, A)) \setminus \{0\} = \left\{ \frac{1}{\lambda_0 - \lambda} : \lambda \in \sigma(A) \right\} \quad \text{bzw.}$$
$$\sigma_p(R(\lambda_0, A)) \setminus \{0\} = \left\{ \frac{1}{\lambda_0 - \lambda} : \lambda \in \sigma_p(A) \right\}.$$

2. Sei S ein symmetrischer Operator auf dem Hilbertraum H. Ein Operator T auf H ist eine selbstadjungierte Erweiterung von S, wenn $S \subset T$ und T selbstadjungiert ist.

   Zeige, dass ein symmetrischer Operator S genau dann eine selbstadjungierte Erweiterung besitzt, wenn $\dim \operatorname{Ker}(S^* + i) = \dim \operatorname{Ker}(S^* - i)$ gilt, wobei mit dim die Hilbertraumdimension gemeint ist; $\dim \operatorname{Ker}(S^* + i)$ und $\dim \operatorname{Ker}(S^* - i)$ heißen Defektindizes von S.

   Hinweis: Verwende Aufgabe 3 von Blatt 4.

3. Der Operator S auf $L^2(0,1)$ sei gegeben durch $D(S) := \{f \in H^1(0,1) : f(0) = f(1) = 0\} = H_0^1$, $Sf(t) = i\frac{d}{dt}f(t)$. Zeige, dass S symmetrisch, aber nicht selbstadjungiert ist.
   Der Operator T auf $L^2(0,1)$ sei gegeben durch $D(T) := \{f \in H^1(0,1) : f(0) = \lambda f(1)\}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und $|\lambda| = 1$, $Tf(t) = i\frac{d}{dt}f(t)$. Zeige, dass T eine selbstadjungierte Erweiterung von S ist.