Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
SoSe 2011

Übungen zu Evolutionsgleichungen

Blatt: 7

(Übung 30.6.2011)

1. Sei H ein Hilbertraum und A der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe auf H. Die *adjungierte Halbgruppe* ist definiert als die Familie von Operatoren $(S(t))_{t\geq 0}$ gegeben durch
$$S(t) := (e^{tA})^*, \qquad t \geq 0.$$
Zeige, dass die adjungierte Halpgruppe stark stetig mit Erzeuger $\bar{A} \subset A^*$ ist (Hinweis 1).
Oder zeige genauer, dass sogar $\bar{A} = A^*$ (Hinweis 2) gilt.
Hinweis 1: Benutze die Tatsache, dass für eine Halbgruppe auf einem Banachraum X schwache Stetigkeit, d.h. die Abbildung $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto x'(T(t)x)$ ist stetig für alle $x \in X$ und für alle $x' \in X'$ (X' der Dualraum von X), und starke Stetigkeit äquivalent sind.
Hinweis 2: Zeige zuerst, dass A^* die Bedingungen von Hille-Yosida erfüllt und damit eine C^0-Halbgruppe $\hat{S}(t)$ erzeugt, und zeige dann, dass $\hat{S}(t) = S(t)$.

2. Sei X ein Banach-Raum und $F : K \to \mathcal{L}(X)$, wobei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen.
   (a) F ist stark stetig auf K.
   (b) F ist gleichmäßig beschränkt, und es existiert $D \subset X$, so dass $\overline{D} = X$ und die Orbits $K \ni t \mapsto F(t)x \in X$ sind stetig für alle $x \in D$.
   (c) Die Abbildung
   $$K \times C \ni (t, x) \mapsto F(t)x \in X$$
   ist gleichmäßig stetig für alle kompakten Teilmengen C von X.

3. Sei $X = \{f \in C([0, 1]), \mathbb{R}) : f(1) = 0\}$ (mit Norm $\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$). Sei $A : X \mapsto X$ gegeben durch:
$$D(A) := \{f \in C^1([0, 1]), \mathbb{R}) : f(1) = 0,\ f'(1) = 0\}, \qquad Af := f'.$$
Zeige, dass A die Voraussetzungen des Theorems von Hille-Yosida für Kontraktionshalbgruppen erfüllt, und gib die von A erzeugte Halbgruppe explizit an.