Übungen zu Evolutionsgleichungen

Blatt: 8

(Übung 14.7.2011)

1. (a) Sei X ein Banachraum und $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf X mit Erzeuger A. Zeige, dass $e^{t\lambda} \in \sigma_p(T(t))$, wenn $\lambda \in \sigma_p(A)$.

   (b) Sei $\alpha > 0$. Zeige, $(T(t))_{t\geq 0}$ ist α-periodisch, d.h. $T(t+\alpha) = T(t)$ für alle $t \geq 0$, falls alle Eigenwerte von A in der Menge $\frac{2\pi i}{\alpha}\mathbb{Z}$ enthalten sind und der Aufspann der zugehörigen Eigenvektoren dicht in X liegt.

2. Seien H_1, H_2 Hilberträume und T ein stetiger, linearer Operator von H_1 nach H_2. Der *Graph* von T ist der abgeschlossene Unterraum $\{(f,g) \in H_1 \times H_2 : Tf = g\}$ von $H_1 \times H_2$.

   (a) Zeige, dass $\{(f,g) \in H_1 \times H_2 : f = -T^*g\}$ das orthogonale Komplement des Graphen von T im Hilbertraum $H_1 \times H_2$ ist.

   (b) Zeige, dass $Id + TT^*$ und $Id + T^*T$ invertierbar sind.

   (c) Schließe, dass die orthogonale Projection von $H_1 \times H_2$ auf den Graphen von T gegeben ist durch die die Operatormatrix

$$B := \begin{pmatrix} (Id+T^*T)^{-1} & T^*(Id+TT^*)^{-1} \\ T(Id+T^*T)^{-1} & Id-(Id+TT^*)^{-1} \end{pmatrix}.$$

3. Sei H ein Hilbertraum und $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf H mit Erzeuger A. Sei S ein weiterer stetiger Operator auf H. Zeige, dass $T(t)$ und S genau dann für alle $t \geq 0$ kommutieren, wenn die Halbgruppe

$$\begin{pmatrix} T(t) & 0 \\ 0 & T(t) \end{pmatrix}, \qquad t \geq 0,$$

den Graphen von S invariant lässt.