Evolutionsgleichungen

Musterlösung zu Blatt 1

1.
$$\sum_{v\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{v\sim w}(x_v-x_w)\right)^2 \le \sum_{v\in\mathbb{Z}^n}\left(4n^2x_v^2+2n^2v^2+n\sum_{v\sim w}x_w^2\right)=\sum_{v\in\mathbb{Z}^n}(6n^2+2n^2)x_v^2,$$
also $\|A\|\le\sqrt{8}n$.
Ferner zeigt Aufgabe 2, dass für beschränkte Operatoren stets eine eindeutige Lösung existiert; diese hängt stetig von dem Anfangswert ab, da der Operator e^{tA} für alle $t\ge 0$ beschränkt und damit stetig ist.

2. Betrachte zuerst die homogene Gleichung ($f\equiv 0$). Dann ist die Lösung eindeutig und gegeben durch $e^{tA}x\in C^\infty(\mathbb{R},X)$, wobei der Ausdruck e^{tA} durch die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion gegeben ist. Es gilt die übliche Funktionalgleichung der Exponentialfunktion bezüglich t, und die Reihe konvergiert gleichmäßig für jedes kompakte Zeitintervall in $\mathbb{R}$, ebenso die abgeleitete Reihe usw.; d.h. $e^{tA}x$ ist tatsächlich eine Lösung. Dass jede Lösung $u(\cdot)$ von dieser Form ist, folgt aus
$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}u(t))=-Ae^{-tA}u(t)+e^{-tA}\frac{d}{dt}u(t)=0;\qquad \text{also } e^{-tA}u(t)=u(0).$$
Die Eindeutigkeit der inhomogenen Gleichung folgt aus der Eindeutigkeit der homogenen Gleichung. Der Ansatz $e^{tA}x(t)$ führt auf die "Variation-der-Konstanten-Formel", welche eine Funktion $u(\cdot)\in C^1([0,\infty);X)$ liefert, und man überprüft leicht, dass es sich dabei in der Tat um eine Lösung handelt.