Evolutionsgleichungen

Musterlösung zu Blatt 3

---

1. a) Wenn $D(T^*)$ dicht in H_2 liegt, ist T^{**} definiert und

$$D(T^{**}) = \{x \in H_1 : \exists z \in H_2 \forall y \in D(T^*) : \langle T^*y\,,\,x\rangle_{H_1} = \langle y\,,\,z\rangle_{H_2}\} \quad \text{mit} \quad T^{**}x := z.$$

Für $y \in D(T^*)$ und $x \in D(T)$ gilt aber definitionsgemäß $\langle Tx\,,\,y\rangle_{H_1} = \langle x\,,\,T^*y\rangle_{H_2}$, weshalb $D(T) \subseteq D(T^{**})$ und $Tx = T^{**}x$ für $x \in D(T)$, da $D(T^*)$ dicht liegt und deshalb obiges z eindeutig bestimmt ist.

b) Wenn $D(T+S)$ dicht in H_1 liegt, ist $(T+S)^*$ definiert und

$$\begin{aligned} D((T+S)^*) &= \{y \in H_2 : \exists z \in H_1\, \forall x \in D(T) \cap D(S) : \langle (T+S)x\,,\,y\rangle_{H_2} = \langle x\,,\,z\rangle_{H_1}\} \\ &\supseteq \{y \in H_2 : \big(\exists z_1 \in H_1\, \forall x \in D(T) : \langle Tx\,,\,y\rangle_{H_2} = \langle x\,,\,z_1\rangle_{H_1}\big) \\ &\qquad \wedge \big(\exists z_2 \in H_1\, \forall x \in D(S) : \langle Tx\,,\,y\rangle_{H_2} = \langle x\,,\,z_2\rangle_{H_1}\big)\} = D(T^*) \cap D(S^*) = D(T^* + S^*); \end{aligned}$$

$$(T+S)^*y = z = z_1 + z_2 = T^*y + S^*y, \qquad \text{falls} \qquad y \in D(T^*) \cap D(S^*).$$

c) $\langle x\,,\,(\lambda T)^*y\rangle_{H_1} = \langle \lambda Tx\,,\,y\rangle_{H_2} = \lambda\langle x\,,\,T^*y\rangle_{H_1} = \langle x\,,\,\overline{\lambda}T^*y\rangle_{H_1}$

d) Wenn $D(RT)$ dicht in H_1 liegt, ist $(RT)^*$ definiert und

$$\begin{aligned} D(T^*R^*) &= \{y \in H_3 : \exists \bar{z} \in H_2\, \forall \bar{x} \in D(R) : \langle R\bar{x}\,,\,y\rangle_{H_3} = \langle \bar{x}\,,\,\bar{z}\rangle_{H_2} \\ &\qquad \wedge\ \exists z' \in H_1\, \forall x \in D(T) : \langle Tx\,,\,\bar{z}\rangle_{H_2} = \langle x\,,\,z'\rangle_{H_1}\} \\ &\subseteq \{y \in H_3 : \exists z \in H_1\, (\forall x \in D(T) : Tx \in D(R)) : \langle RT(x)\,,\,y\rangle_{H_3} = \langle x\,,\,z\rangle_{H_1}\} = D((RT)^*), \end{aligned}$$

wobei für $y \in D(T^*R^*)$ und alle $x \in D(RT)$ gilt $\langle y\,,\,RTx\rangle_{H_3} = \langle R^*y\,,\,Tx\rangle_{H_2} = \langle T^*R^*y,\,x\rangle_{H_1}$, also $T^*R^* \subseteq (RT)^*$.

e)
$$\begin{aligned} D(S^*) &= \{y \in H_2 : \exists z \in H_1\, \forall x \in D(S) : \langle Sx\,,\,y\rangle_{H_2} = \langle x\,,\,z\rangle_{H_1}\} \\ &\subseteq \{y \in H_2 : \exists z \in H_1 \forall x \in D(T) : \langle Tx\,,\,y\rangle_{H_2} = \langle x\,,\,z\rangle_{H_1}\} = D(T^*). \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Rg}(\lambda - T)^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in D(\lambda - T) = D(T) : \quad 0 = \langle (\lambda - T)x\,,\,y\rangle = \langle x\,,\,0\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad y \in \mathrm{Ker}((\lambda - T)^*); \qquad \text{und} \quad (\lambda - T)^* = \overline{\lambda} - T^*. \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} \|(T-\lambda)x\|^2 &= \|(T - \mathrm{Re}\lambda)x\|^2 + \|-i(\mathrm{Im}\lambda)x\|^2 + \langle -i(\mathrm{Im}\lambda)x\,,\,(T-\mathrm{Re}\lambda)x\rangle \\ &\quad + \langle (T-\mathrm{Re}\lambda)x\,,\,-i(\mathrm{Im})\lambda x\rangle = \|(T-\mathrm{Re}\lambda)x\|^2 + |\mathrm{Im}\lambda|^2\|x\|^2 \end{aligned}$$

2. Da $D(A) = H$ ist, genügt es mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen zu zeigen, dass A abgeschlossen ist. Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in H mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|y - Ax_n\| = 0$. Dann ist

$$\|Ax - y\|^2 = \langle Ax - \lim_{n\to\infty} Ax_n\,,\,Ax - y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle A(x - x_n)\,,\,Ax - y\rangle = \lim_{n\to\infty} (x - x_n\,,\,A(Ax - y)\rangle = 0,$$

also A abgeschlossen.