Evolutionsgleichungen

Musterlösung zu Blatt 4

---

1. $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ ist klar, wenn man in $iii)$ natürlich noch $x \neq 0$ verlangt.
   $(iii) \Rightarrow (i)$ bzw. $\neg(i) \Rightarrow \neg(iii)$: Sei $(\lambda - A)$ injektiv und $\mathrm{Rg}(\lambda - A)$ abgeschlossen, dann existiert $(\lambda - A)^{-1} : \mathrm{Rg}(\lambda - A) \mapsto X$, ist abgeschlossen und nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen stetig. Es folgt

   $$\|x\| = \|(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)x\| \leq \|(\lambda - A)^{-1}\|\|(\lambda - A)x\|, \quad \text{also} \quad \|(\lambda - A)x\| \geq \frac{1}{\|(\lambda - A)^{-1})\|}\|x\|.$$

   $(i) \Rightarrow (iii)$ bzw. $\neg(iii) \Rightarrow \neg(i)$: Falls $\|(\lambda - A)x\| \geq c\|x\|$ für ein $c > 0$, so ist $(\lambda - A)$ natürlich injektiv. Sei jetzt $y_n = (\lambda - A)x_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathrm{Rg}(\lambda - A)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} = y \in X$, dann ist x_n nach Voraussetzung eine Cauchy-Folge in X. Es sei $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Auf Grund der Abgeschlossenheit von A gilt $Ax = y$, d.h. $y \in \mathrm{Rg}(\lambda - A)$.

2. a) folgt direkt aus der Polarisationsgleichung:

   $$\langle x|y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \quad \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \text{bzw.}$$
   $$\langle x|y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) \quad \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

   b) Sei $(Id - U)x = 0$, dann gilt für alle $z = (Id - U)y \in \mathrm{Rg}(Id - U)$

   $$\langle x|z\rangle = \langle x|y - Uy\rangle = \langle x|y\rangle - \langle x|Uy\rangle = \langle x|y\rangle - \langle Ux|Uy\rangle = 0,$$

   und da $\mathrm{Rg}(Id - U)$ dicht in H liegt, $x = 0$.
   c) Der Operator U ist injektiv und $(x_n)_{n\in}$ ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn $(Ux_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, was wiederum ganau dann der Fall ist, wenn $(x_n, Ux_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathrm{G}(U)$ ist.

3. Injektivität folgt aus Aufgabe 1. (g) von Blatt 3 und ebenso

   $$\|x\|^2 = \|(A+i)y\|^2 = \|Ay\|^2 + \cancel{|\mathrm{Im} i|}^2\|y\|^2 = \|(A-i)y\|^2 = \|C(A)x\|^2 \quad \text{für alle } x \in \mathrm{Rg}(A+i).$$

   Nach Theorem 2.26 aus der Vorlesung ist A genau dann selbstadjungiert, wenn $(A - i)$ und $(A + i)$ surjektiv sind, was aber gerade bedeutet, dass $C(A)$ eine auf ganz H definierte, surjektive Isometrie, d.h. unitär ist.

   Zusatz: Schreibe zur Abkürzung $U := C(A)$. Für $z \in D(A)$ und $x \in \mathrm{Rg}(T + i)$ mit $x = Az + iz$ ist $U(x) = Az - iz$, was sich auch schreiben lässt als $(Id + U)x = 2Az$ und $(Id - U)x = 2iz$. Da $(Id - U)$ injektiv ist, erhält man $Az = i(Id + U)(Id - U)^{-1}z$, d.h. U ist Cayley-Transformierte von genau einem symmetrischem Operator A. Ist umgekehrt U eine Isometrie mit $(Id - U)$ injektiv, so ist $Az = i(Id + U)(Id - U)^{-1}z$ ein symmetrischer Operator $A : \mathrm{Rg}(Id - U) \mapsto \mathrm{Rg}(Id + U)$ (der genau dann selbstadjungiert ist, wenn U unitär ist).