Evolutionsgleichungen

Musterlösung zu Blatt 5

---

1. (a) Es konvergiere $f_n \to f$ und $qf_n \to g$ in $L^2(\Xi)$. Dann existiert eine Teilfolge f_{n_i} mit $f_{n_i} \to f$ f.ü. in Ξ, d.h. $qf_{n_i} \to qf$ f.ü. in Ξ. Nun konvergiert aber qf_{n_i} (nach eventuellem Übergang zu einer weiteren Teilfolge) f.ü. in Ξ gegen g, weshalb $g = qf$ f.ü. in Ξ, woraus die Abgeschlossenheit von M_q folgt.
Betrachte jetzt die Teilmengen $\Omega_n := \{x \in \Xi : q(x) \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $L^2(\Omega_n) \subseteq D(M_q)$ und $\Xi = \cup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_N$. Aus dem Lebegueschen Integrationssatz folgt daher, dass $D(M_q)$ dicht in $L^2(\Xi)$ liegt.
(b) Wenn q wesentlich durch $m > 0$ beschränkt ist, gilt natürlich $\|qf\| \leq m\|f\|$ für alle $f \in L^2(\Xi)$, also ist M_q beschränkt.
Sei jetzt q nicht wesentlich beschränkt, dann existiert zu jedem $m > 0$ eine messbare Menge Ω_m mit $0 < \mu(\Omega_m) < \infty$ und $|q| \geq m$ auf Ω_m. Aus
$$\|M_q\chi_m\|^2 = \int_{\Omega_m} |q(x)|^2 \, d\mu(x) \geq m^2\mu(\Omega_m = m^2\chi_m,$$
ergibt sich, dass M_q unbeschränkt ist, wobei χ_m die charakteristische Funktion der Menge Ω_m bezeichnet.
(c) Man betrachte das wesentliche Bild $\operatorname{ess}\operatorname{Rg}(q) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall\epsilon > 0 : \mu(q^{-1}(U_\epsilon(\lambda)) \neq 0\}$ von q, wobei $U_\epsilon := \{\lambda' \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda'| < \epsilon\}$. Dann gilt, dass λ genau dann in der Resolventenmenge von M_q liegt, wenn $\lambda \notin \operatorname{ess}\operatorname{Rg}(q)$, weil in diesem Fall $c > 0$ existiert mit $|\lambda - q(x)| > c$ f.ü. in Ξ, weswegen die Funktion $p(x) := 1/(\lambda - q(x))$ und damit auch der Operator M_p beschränkt sind, und $M_p(\lambda - M_q)f = f$ für alle $f \in D(M_q)$ sowie $(\lambda - M_q)M_pg = g$ für alle $g \in L^2(\Xi)$.
Ferner ist jedes $\lambda \in \operatorname{ess}\operatorname{Rg}(q)$ im approximativen Punktspektrum enthalten und genau dann ein Eigenwert, wenn $\mu(\{x : q(x) = \lambda\}) > 0$ gilt. Die zweite Aussage folgt unmittelbar, da $(\lambda - M_q)f = 0$ f.ü. in Ξ genau dann, wenn $\lambda = q$ f.ü. auf dem Träger von $f \in D(M_q)$. Für die erste Aussage betrachte die charakteristischen Funktionen χ_n, $n \in \mathbb{N}$, der Mengen $\Omega_n := \{x : |q(x) - \lambda| \leq 1/n\}$, für die gilt $\lim_{n\to\infty} \|(\lambda - M_q)\chi_n\| = 0$, wobei die Mengen Ω_n, falls nötig, derart beschnitten werden, dass sie endliches, aber noch echt positives Maß haben.
(d) Da $\int_\Xi q(x)f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x) = \int_\Xi f(x)\overline{q(x)g(x)}\, d\mu(x)$ für alle $f, g \in D(M_q)$ genau dann gilt, wenn $q(x) = \overline{q(x)}$ f.ü. in Ξ, ist M_q genau dann symmetrisch, wenn $q(x) \in \mathbb{R}$ f.ü. in Ξ. Für die Selbstadjungiertheit bleibt wegen $D(M_q) \subseteq D(M_q^*)$ nur noch $D(M_q^*) \subseteq D(M_q)$ zu zeigen. Sei nun $g \in D(M_q^*)$. Dann erhält man
$$\int_\Xi q(x)f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x) = \int_\Xi f(x)\overline{q(x)g(x)}\, d\mu(x) = \int_\Xi f(x)\overline{M_q^*g(x)}\, d\mu(x) \quad \text{für alle } f \in D(M_q),$$
so dass $g \in D(M_q)$ gezeigt ist, falls $qg = M_q^*g$ f.ü. in Ξ gilt, da $M_q^*g \in L^2(\Xi)$ nach Definition. Angenommen $\mu(A) := \mu(\{x : |M_q^*g(x) - q(x)g(x)| \neq 0\}) > 0$, dann existiert $M > 0$ und $B \subseteq A$ mit o.B.d.A. $\operatorname{Re}(M_q^*g(x) - q(x)g(x)) > 0$, $\mu(B) > 0$ und $|q(x)| \leq M$ für alle $x \in B$, also $\chi_B \in D(M_q)$, aber $\int_\Xi \chi_B \overline{(M_q^*g(x) - q(x)g(x))}\, d\mu(x) \neq 0$. Es folgt $M_q^*g(x) = q(x)g(x)$ f.ü..

2. Da P selbstadjungiert ist, folgt aus dem Spaktralsatz, dass ein endlicher Maßraum Ξ, ein Multipilkationsoperator M_q auf $L^2(\Xi)$ und eine unitäre Transformation $U : H \mapsto L^2(\Xi)$ existieren mit $A = U^{-1}M_qU$. Nun ist aber ein Multiplikationsoperator M_q genau dann eine orthogonale Projektion, wenn die Funktion q als charakterische Funktion einer messbaren Menge gegeben ist, also genau die Werte 0 und 1 annimmt. Ferner bleiben das Spektrum und die Eigenschaft eine orthogonale Projektion zu sein unter unitären Transformationen erhalten, woraus die Behauptung folgt.

3. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Lemma 2.29 aus der Vorlesung besagt, dass $\lambda - A$ abgeschlossenes Bild hat und injektiv ist. D.h. λ ist genau dann in der Resolventenmenge von A enthalten, wenn $\operatorname{Rg}(\lambda - A)^\perp = \operatorname{Ker}(\overline{\lambda} - A^*) = 0$. Letztere Bedingung ist aber ebenfalls nach Lemma 2.29 entweder

für alle oder für kein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\text{Im}\lambda > 0$ erfüllt, woraus die möglichen Fälle für das Spektrum folgen.
Ferner zeigt Theorem 2.29, dass A genau dann selbstadjungiert ist, wenn i und $-i$ in der Resolventenmege enthalten sind, also nach oben gesagtem genau dann, wenn das Spektrum reellwertig ist.