Evolutionsgleichungen

Musterlösung zu Blatt 7

---

1. Wegen $\lim_{t\to 0}\langle x, S(t)y - y\rangle = \lim_{t\to 0}\langle T(t)x - x, y\rangle = 0$ ist $S(t)$ schwach und mit Hinweis 1 daher auch stark stetig. Sei $\bar{A}$ der Erzeuger von $S(t)$. Dann gilt für alle $x \in D(A)$ und $y \in D(\bar{A})$

$$\langle x, \bar{A}y\rangle = \lim_{t\to 0}\langle x, \frac{S(t)y - y}{t}\rangle = \lim_{t\to 0}\langle \frac{T(t)x - x}{t}, y\rangle = \langle Ax, y\rangle,$$

woraus folgt: $y \in D(A^*)$ und $\bar{A}y = A^*y$, d.h. $\bar{A} \subset A^*$.
Da A (dicht definiert und) abgeschlossen ist, ist A^* dicht definiert (und abgeschlossen). Ferner ergibt sich aus $\langle x, ((\lambda - A)^{-1})^*(\overline{\lambda} - A^*)y\rangle = \langle(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}x, y\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x \in H$ und $y \in D(A^*)$ bzw. $\langle x, (\overline{\lambda} - A^*)((\lambda - A)^{-1})^*y\rangle = \langle(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)x, y\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $y \in H$ und $x \in D(A)$, dass $\rho(A) = \overline{\rho(A^*)}$ und $(\overline{\lambda} - A^*)^{-1} = ((\lambda - A)^{-1})^*$ gilt.
Sei nun $\omega \geq 0$ mit $\{z : \mathrm{Re} z > \omega\} \subseteq \rho(A)$. Dann erhält man wegen $\|((\lambda - A)^{-1})^*\| = \|((\lambda - A)^{-1})\|$ auch die Hille-Yosida-Bedingung $\|(\lambda - A^*)^{-n}\| \leq \dfrac{M}{(\lambda - \omega)^n}$ für alle $\mathbb{R} \ni \lambda > \omega$.
Bezeichne mit $\hat{S}(t)$ die von A^*-erzeugte C_0-Halbgruppe und mit ω' das Maximum der Wachstumsschranken von $S(t)$ und $\hat{S}(t)$. Dann gilt für alle $\lambda > \omega'$

$$\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x\,dt =\right)(\lambda - \bar{A})^{-1}x = (\lambda - A^*)^{-1}x \left(= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\hat{S}(t)x\,dt\right).$$

Es folgt $\bar{A} = A^*$, also $S(t) = \hat{S}(t)$ (was sich auch aus der Eindeutigkeit der Laplace-Transformierten ablesen läßt).

2. a) $\Rightarrow$ b): Wenn F stark stetig für jedes $x \in X$ ist, dann natürlich auch für jedes $x \in D$.
Angenommen F ist nicht gleichmäßig beschränkt, dann muss es nach dem Satz von Banach-Steinhaus ein $x \in X$ geben, so dass für jeses $n \in \mathbb{N}$ ein $t_n \in K$ existiert mit $\|F(t_n)x\| \geq n$. Da K kompakt ist, hat die Folge t_n eine gegen $t \in K$ konvergente Teilfolge, was einen Widerspruch zu der Steitgkeit von $F(\cdot)x$ in t ergibt.
b) $\Rightarrow$ c): Sei $\|F(t)\| \leq M$ für alle $t \in K$. Sei $\epsilon > 0$ und $(t_n, x_n) \in K \times X$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge die gegen (t, x) konvergiert. Wähle $x' \in D$ mit $\|x - x'\| < \epsilon$ und n so groß, dass $\|F(t)x' - F(t_n)x'\| \leq \epsilon$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\|F(t)x - F(t_n)x_n\| = \\
&\qquad \|(F(t)x - F(t)x') + (F(t)x' - F(t_n)x') + (F(t_n)x' - F(t_n)x) + (F(t_n)x - F(t_n)x_n)\| \\
&\qquad \leq M\epsilon + \epsilon + M\epsilon + M\epsilon,
\end{aligned}$$

d.h. $F(\cdot)\cdot$ ist stetig und damit gleichmäßig stetig auf Kompakta.
c) $\Rightarrow$ a): Wenn man jeweils $C = \{x\}$, $x \in X$, wählt, erhält man die starke Stetigkeit.

3. A ist abgeschlossen und dicht definiert. Ferner hat die Differentialgleichung $\lambda f(\cdot) - f'(\cdot) = g(\cdot) \in X$ für $\lambda \neq 0$ die eindeutige Lösung $D(A) \ni f_g(\cdot) = \int_\cdot^1 e^{\lambda(t-s)}g(s)\,ds$ und

$$\|f_g\| \leq \|g\| \sup_{0\leq t\leq 1}\int_t^1 \|e^{\lambda(t-s)}\|ds \leq \frac{\|g\|}{\mathrm{Re}\,\lambda},$$

so dass $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,z > 0\} \subseteq \rho(A)$ und $\|R(\lambda, A)\| \leq 1/\lambda$ für alle $\lambda > 0$ gilt.
Die zugehörige C_0-Halbgruppe $T(t)$, $t \geq 0$, ist der Linksshift

$$(T(t)f)(x) = \begin{cases} f(x+t) & \text{für } x + t \leq 1 \\ 0 & \text{für } x + t \geq 1 \end{cases}.$$